# MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

65. BAND, 1. HEFT
MIT 1 TEXTABBILDUNG
(AUSGEGEBEN IM JANUAR 1961)

PERIODICAL

QA1
M877
Vols. 65-66

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1961

PERIODICAL

Mh. Math.

# Monatshefte für Mathematik

**Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik**

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

*an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,*

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

*Springer-Verlag, Wien, I, Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien*

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

**Der Verlag**


## 65. Band./1. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite


**Lesky, P.** Die Übersetzung der klassischen orthogonalen Polynome in die Differenzenrechnung . . . . . 1

**Lochs, G.** Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmäßigen Kettenbrüche . . . . . 27

**Brauner, H.** Die konstant gedrallte Netzfläche 4. Grades . . . . . 53

**Groemer, H.** Abschätzungen für die Anzahl der konvexen Körper, die einen konvexen Körper berühren . . . . . 74

**Christian, U.** On Certain Factors of Automorphy for the Modular Group of Degree $n$ . . . . . 82

**Buchbesprechungen** . . . . . 88

# Die Übersetzung der klassischen orthogonalen Polynome in die Differenzenrechnung

Von

**Peter Lesky**, Innsbruck*

*(Eingegangen am 14. März 1960)*

In der Arbeit "On the Finite Difference Analogue of Rodrigues' Formula" von *M. Weber* und *A. Erdelyi* [1] erfolgt die Übersetzung der für die klassischen orthogonalen Polynome geltenden Formel von Rodrigues in die Differenzenrechnung; aus dieser Übersetzung werden dann alle möglichen orthogonalen Polynomsysteme hergeleitet, die einer solchen Rodrigues-Formel genügen.

Mit Hilfe eines Variationsprinzipes, das auf einem Satz von *W. Gröbner* [2] beruht, kann man im Gegensatz dazu die klassischen orthogonalen Polynome direkt in die Differenzenrechnung übersetzen, wobei sich die Analogie zwischen Differenzen und Differentialen bei der Konstruktion der Polynome von selbst wieder in den entsprechenden Rodrigues-Formeln ergibt. Diese Übersetzung ist vom Verfasser teilweise und unter gewissen Einschränkungen in zwei Arbeiten [3], [4] erfolgt.

Es soll nun im Anschluß an die in [1], [3] und [4] genannten Arbeiten einerseits gezeigt werden, daß auch bei diesen Polynomen, die mit einem Variationsprinzip konstruiert werden, in der Differenzenrechnung eine gewisse Vollständigkeit erreicht werden kann, so daß alle bekannten, einer derartigen Rodrigues-Formel genügenden orthogonalen Polynome als Sonderfälle dieser Polynome erscheinen[1] und daher mit diesen Polynomen eine eindeutige Übersetzung der klassischen orthogonalen Polynome in die Differenzenrechnung möglich ist; andererseits sollen

* Mathematisches Institut der Universität Innsbruck.

[1] Diese Vollständigkeit bezieht sich allerdings nur auf die spezielle Gestalt der Rodrigues-Formel (19). Mit dem hier verwendeten Konstruktionsverfahren lassen sich noch viel allgemeinere Rodrigues-Formeln mit entsprechenden Orthogonalsystemen angeben; eine Tatsache, die vielfach übersehen wird und die Annahme, es gäbe nur Rodrigues-Formeln der Art (18) und (19), widerlegt.

die wichtigsten Eigenschaften dieser übersetzten Polynome, wie Rekursionsformel, Differenzengleichung, erzeugendes Polynom usw. angegeben werden.

## § 1. Konstruktion der Polynome in der Differenzenrechnung und Vergleich mit den klassischen Polynomen

1. Konstruktion der Orthogonalpolynome nach einem Variationsprinzip im endlichen und unendlichen Grundintervall — 2. Übersetzung der Formel von Rodrigues in die Differenzenrechnung — 3. Die klassischen orthogonalen Polynome und deren Übersetzung in die Differenzenrechnung

1. Gesucht werden Polynome mit reellen Koeffizienten, die in $n$ den Grad $\nu$ erreichen

$$y_{\nu n} = a_{\nu 0} + \binom{n}{1} a_{\nu 1} + \binom{n}{2} a_{\nu 2} + \ldots + \binom{n}{\nu} a_{\nu\nu}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} n = A, A+1, \ldots, B-1, B \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots, N \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A, B \text{ reell}, N = B - A \text{ positiv ganz oder } N = B = \infty \end{array}$$

und den Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_{n=A}^{n=B} p_n y_{\nu n} y_{\mu n} = \begin{cases} 0 \text{ für } \nu \neq \mu \\ \sigma_\nu > 0 \text{ für } \nu = \mu \end{cases} \qquad p_n > 0 \tag{2}$$

genügen, in denen eine nur von $n$ abhängige Gewichtsfunktion $p_n$ enthalten ist.

Erklärt man die Differenzen der Polynome (1) in folgender Weise

$$\Delta^k y_{\nu n} = y_{\nu, n+k} - \binom{k}{1} y_{\nu, n+k-1} + \ldots + (-1)^k y_{\nu n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

dann ist die $\nu$-te Differenz

$$\Delta^\nu y_{\nu n} = a_{\nu\nu} \tag{3}$$

eine von null verschiedene Größe, da die Polynome (1) in $n$ den Grad $\nu$ erreichen.

Die Orthogonalitätsbedingungen (2) können nach einem Hilfssatz von *W. Gröbner* [2] zusammen mit der Gleichung (3) durch das Variationsproblem

$$\Omega = \sum_{n=A}^{n=B} [p_n y_{\nu n}^2 + 2 \lambda_n (\Delta^\nu y_{\nu n} - a_{\nu\nu})] = \text{Min!} \tag{4}$$

ersetzt werden, aus dem sich nach Überlagerung von $y_{\nu n}$ mit einer willkürlichen Zahlenfolge $\{z_n\}$ und anschließend durchgeführter Variation die Forderung

$$\delta \Omega = \left(\frac{\partial \Omega(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 2 \sum_{n=A}^{n=B} [p_n y_{\nu n} z_n + \lambda_n \Delta^\nu z_n] = 0, \qquad (5)$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, N$$

ergibt[2].

Die Bedingung (5) muß für jede beliebige Folge $\{z_n\}$ erfüllt sein; daher sucht man (5) so umzuformen, daß eine Ausklammerung der willkürlichen $\{z_n\}$ gelingt.

Durch wiederholte Anwendung der partiellen Summation

$$\sum_{n=A}^{n=B} u_n \Delta v_n = [u_n v_n]_{n=A}^{n=B+1} - \sum_{n=A}^{n=B} v_{n+1} \Delta u_n \qquad (6)$$

auf das zweite Glied in (5) und nach einfacher Umformung der dabei entstehenden Summe nimmt (5) folgende Gestalt an:

$$\tfrac{1}{2} \delta \Omega = \sum_{n=A}^{n=B} [p_n y_{\nu n} + (-1)^\nu \Delta^\nu \lambda_{n-\nu}] z_n - \lambda_A \Delta^{\nu-1} z_A + \Delta \lambda_A \Delta^{\nu-2} z_{A+1} -$$

$$- \ldots + (-1)^\nu \Delta^{\nu-1} \lambda_A \cdot z_{A+\nu-1} + (-1)^{\nu-1} \sum_{n=A}^{n=A+\nu-1} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \cdot z_n +$$

$$+ \lambda_{B+1} \Delta^{\nu-1} z_{B+1} - \Delta \lambda_{B+1} \Delta^{\nu-2} z_{B+2} + \ldots + (-1)^{\nu-1} \Delta^{\nu-1} \lambda_{B+1} \cdot z_{B+\nu} +$$

$$+ (-1)^\nu \sum_{n=B+1}^{B+\nu} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \cdot z_n = 0. \qquad (7)$$

Die Variation $\delta \Omega$ muß bei jeder Wahl der Folge $\{z_n\}$ verschwinden; wählt man daher etwa $z_k = 1$ $(A + \nu \leqq k \leqq B)$ und alle übrigen $z_i$ gleich null, dann folgt aus (7), wenn wieder $n$ statt $k$ geschrieben wird,

$$y_{\nu n} = \frac{(-1)^{\nu+1}}{p_n} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \quad \text{für } A + \nu \leqq n \leqq B. \qquad (8)$$

Läßt man diese Bedingung auch für $n = A, A+1, \ldots, A+\nu-1$ gelten, so werden dadurch nur die willkürlich wählbaren, im Variationsprinzip nicht vorkommenden, Lagrangefaktoren $\lambda_{A-\nu}, \ldots, \lambda_{A-1}$ festgelegt. Die Bedingung (8) gilt dann für $A \leqq n \leqq B$ und in der Gleichung (7) entfällt die erste Summe. Die in (7) verbleibenden Differenzen kann man wieder mit der partiellen Summation auflösen, wobei sich ein großer Teil der Glieder weghebt, so daß schließlich von der Variation nur mehr

---

[2] Man bildet mit einem Faktor $\varepsilon \{y_{\nu n} + \varepsilon z_n\}$, differenziert nach $\varepsilon$ und setzt schließlich $\varepsilon = 0$. Eine ausführliche Darstellung des folgenden Verfahrens, insbesondere der Bedingungen, die im unendlichen Grundintervall der Folge $\{z_n\}$ vorzuschreiben sind, findet man in [3].

$$\tfrac{1}{2}\delta\Omega = -z_{A+\nu-1}\lambda_{A-1} + z_{A+\nu-2}\left[\binom{\nu}{1}\lambda_{A-1} - \lambda_{A-2}\right] + \ldots + (-1)^{\nu} z_A \cdot$$
$$\cdot \left[\binom{\nu}{\nu-1}\lambda_{A-1} - \binom{\nu}{\nu-2}\lambda_{A-2} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\lambda_{A-\nu}\right] + z_{B+\nu}\lambda_B - z_{B+\nu-1}\cdot$$
$$\cdot \left[\binom{\nu}{1}\lambda_B - \lambda_{B-1}\right] + \ldots + (-1)^{\nu+1} z_{A+1}\left[\binom{\nu}{\nu-1}\lambda_B - \binom{\nu}{\nu-2}\lambda_{B-1} + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{\nu-1}\lambda_{B-\nu+1}\right] \qquad (9)$$

bleibt. Dieser Ausdruck muß ebenfalls für jede Folge $\{z_n\}$ verschwinden; spezialisiert man nun die Intervallsgrenzen, so ergeben sich folgende Fälle:

I. *Beiderseitig endliches Grundintervall* ( $|A|, |B| < \infty$).

Setzt man $z_{A+\nu-1} = 1$ und alle anderen $z_i$ gleich null, so muß zur Erfüllung von (9) $\lambda_{A-1} = 0$ sein. Setzt man dann $z_{A+\nu-2} = 1$ und alle anderen $z_i$ gleich null, so muß auch $\lambda_{A-2} = 0$ sein. Schließt man auf diese Art weiter, so findet man die Bedingung, daß alle

$$\lambda_{A-j-1} \text{ und } \lambda_{B-j} \text{ für } j = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$$

gleich null sein müssen. Die Lagrangefaktoren legen nach (8) die orthogonalen Polynome $y_{\nu n}$ fest; da diese $y_{\nu n}$ aber in $n$ den Grad $2\nu$ haben müssen, können die $\lambda_n$ bis auf einen Faktor $p_n$ nur Polynome $2\nu$-ten Grades in $n$ sein. Im einfachsten Fall, das heißt für $p_n = 1$, ergeben sich daher die $\lambda_n$, abgesehen von einem bezüglich $n$ konstanten Normierungsfaktor

$$\lambda_n = \binom{n-A+\nu}{\nu}\binom{B-n}{\nu} = \binom{n-A+\nu}{n-A}\binom{B-n}{B-n-\nu}, \quad n = A, A+1, \ldots, B-1, B.$$

Verallgemeinert man die Gewichtsfunktion noch in einer, den Jakobischen Polynomen entsprechenden Art

$$p_n = \binom{n-A+\beta}{n-A}\binom{B-n+\alpha}{B-n}, \quad \alpha, \beta > -1, \; n = A, A+1, \ldots, B-1, B, \qquad (10)$$

dann können die $\lambda_n$ nur die folgende Form haben:

$$\lambda_n = \binom{n-A+\nu+\beta}{n-A}\binom{B-n+\alpha}{B-n-\nu}, \quad \text{gleiche Bedingungen für } \alpha, \beta \text{ und } n.$$

Versieht man in diesem Fall (I) alle $\lambda_n$ mit negativen Vorzeichen, um auch in diesem Punkte eine Übereinstimmung mit den klassischen orthogonalen Polynomen zu erreichen, so erhalten die orthogonalen Polynome im endlichen Grundintervall, die wir als *verallgemeinerte Tschebyschew'sche Interpolationspolynome* bezeichnen wollen, die Form[3]

[3] Noch allgemeiner kann, wie schon oben erwähnt, zu diesem und zu den folgenden $\lambda_n$ ein nur von $\nu$ abhängiger Faktor $E_\nu$ gesetzt werden, der unverändert in das $y_{\nu n}$ eingeht und letzten Endes im Normierungsfaktor aufscheint. In diesem Faktor drückt sich auch die Möglichkeit der beliebigen Wahl des Vorzeichens von $\lambda_n$ (auch von $\nu$ abhängig) aus.

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{I})} = \frac{(-1)^{\nu}}{\binom{n-A+\beta}{n-A}\binom{B-n+\alpha}{B-n}} \Delta^{\nu}\left\{\binom{n-A+\beta}{n-\nu-A}\binom{B-n+\nu+\alpha}{B-n}\right\}, \tag{11}$$

beziehungsweise nach Auflösung und Vereinfachung der Differenz

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{I})} = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \frac{\binom{\nu}{k}\binom{n-A}{\nu-k}\binom{B-n}{k}}{\binom{\beta+\nu-k}{\nu-k}\binom{\alpha+k}{k}}, \qquad \begin{array}{l} \nu = 0, 1, 2, \ldots, N, \\ n = A, A+1, \ldots, B, \\ N = B - A \text{ positiv ganz}, \\ \alpha, \beta \text{ reell} > -1. \end{array} \tag{12}$$

II. *Einseitig unendliches Grundintervall* ( $|A| < \infty$, $B = \infty$).

Trotz des unendlichen Grundintervalles sollen die in den Orthogonalitätsbedingungen (2) stehenden Summen endliche Werte haben; daher muß die Gewichtsfunktion einen „konvergenzerzeugenden" Faktor enthalten, der wegen der Polynome $y_{\nu n}$ stärker gegen null geht, als die Potenzen von $n$ gegen unendlich. Dasselbe gilt für die Lagrangefaktoren, die wegen $B = \infty$ nun die Bedingung $\lambda_{\infty} = 0$ erfüllen müssen. Für die untere Grenze $A$ ergeben sich wie in I die Bedingungen

$$\lambda_{A-j-1} = 0 \text{ für } j = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1.$$

Im einfachsten Fall, das heißt jetzt für $p_n = e^{-n}$, ergeben sich die $\lambda_n$[4]

$$\lambda_n = \binom{n-A+\nu}{\nu} e^{-n-\nu}, \quad n = A, A+1, \ldots.$$

Verallgemeinert man das $p_n$ noch in einer, den Laguerreschen Polynomen entsprechenden Art

$$p_n = \binom{n-A+\alpha}{n-A} e^{-n}, \qquad \alpha > -1, \; n = A, A+1, \ldots, \tag{13}$$

dann findet man für die entsprechenden $\lambda_n$

$$\lambda_n = \binom{n-A+\nu+\alpha}{n-A} e^{-n-\nu}, \qquad \text{gleiche Bedingungen für } \alpha \text{ und } n.$$

Wieder zur Übereinstimmung mit den klassischen orthogonalen Polynomen multipliziert man $\lambda_n$ mit $(-1)^{\nu+1}$ und erhält die im einseitig unendlichen Grundintervall orthogonalen Polynome, die wir als *Elemente der Laguerreschen Matrizen* bezeichnen[5]

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{II})} = \frac{e^{n}}{\binom{n-A+\alpha}{n-A}} \Delta^{\nu}\left\{e^{-n}\binom{n-A+\alpha}{n-A-\nu}\right\}, \tag{14}$$

das heißt nach Auflösung der Differenz

---

[4] Das $e^{-\nu}$ entspricht dem in Fußnote 2) genannten Faktor $E_{\nu}$, der hier zur Vereinfachung der Polynomdarstellung so gewählt wurde.

[5] Zu der Verallgemeinerung durch Multiplikation mit $E_{\nu}$ kommt hier noch die Möglichkeit, $e$ durch $e^{\beta}(\beta > 0)$ zu ersetzen.

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{II})} = \frac{1}{\binom{\alpha+\nu}{\nu}} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{\nu-k} e^{-k} \binom{n-A+\alpha+k}{k} \binom{n-A}{\nu-k}, \tag{15}$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = A, A+1, \ldots, \quad \alpha \text{ reell} > -1.$$

IIa. *Sonderfall des einseitig unendlichen Grundintervalles* ($|A| < \infty$, $B = \infty$).

Wählt man als „konvergenzerzeugende" Gewichtsfunktion

$$p_n = \frac{a^{-n}}{(n-A)!}, \tag{16}$$

in der $a > 0$ vorauszusetzen ist (wegen $p_n > 0$), dann stellt dies einen Fall dar, der in II nicht enthalten ist, und daher gesondert behandelt werden muß. Das $\lambda_n$ erfüllt alle in II gestellten Bedingungen, wenn es die Form

$$\lambda_n = \binom{n+\nu-A}{\nu} \frac{a^{-n-\nu}}{(n+\nu-A)!}, \quad n = A, A+1, \ldots$$

hat. Nimmt man wieder $(-1)^{\nu+1}$ als Faktor zum $\lambda_n$, dann erhält man die Polynome

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} = a^n (n-A)!\, \Delta^{\nu}\left[a^{-n}\binom{n-A}{\nu} \frac{1}{(n-A)!}\right], \tag{17}$$

und nach Auflösung der Differenz

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{n-A}{k} \frac{a^{k-\nu}}{(\nu-k)!}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = A, A+1, \ldots \tag{18}$$

die Polynome von *Charlier*.

Mit diesen drei Fällen wird bereits die Übersetzung der klassischen orthogonalen Polynome in die Differenzenrechnung möglich sein.

2. In [1] wird die Formel von Rodrigues für die klassischen orthogonalen Polynome $y_n(x)$

$$C_n\, y_n(x) = F_n(x) = \frac{1}{p(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{p(x)\, [X(x)]^n\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

bis auf eine kleine Modifikation[6] in die Form

[6] Die Modifikation besteht darin, daß in [1]

$$F_{\nu n} = \frac{1}{p_n} \Delta^{\nu} \{p_{n-\nu}\, X_n\, X_{n-1} \ldots X_{n-\nu+1}\}$$

gesetzt wurde; dadurch vertauschen sich gerade die folgenden Fälle IIa und III.

$$C_\nu y_{\nu n} = F_{\nu n} = \frac{1}{p_n} \Delta^\nu \{p_n \cdot X_n \cdot X_{n-1} \cdot \ldots \cdot X_{n-\nu+1}\}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

$$F_{on} = 1 \qquad (n \text{ durchläuft eine Folge von reellen Zahlen, deren Glieder sich um eins unterscheiden})$$

übersetzt; darin ist $p_n$ eine beliebige Funktion von $n$, die mit der in (2) eingeführten Gewichtsfunktion identisch ist, $X_n$ ein Polynom in $n$ (beide sind unabhängig von $\nu$), $C_\nu$ eine nur von $\nu$ abhängige Größe. Es werden nun *alle* Funktionen $p_n$ und Polynome $X_n$ gesucht, für die $y_{\nu n}$ immer ein Polynom vom Grade $\nu$ in $n$ wird.

Diese Aufgabe wird in [1] auf elementare Weise gelöst und soll nur in kurzen Zügen, um Vergleichsmomente mit Punkt 1 zuzulassen, wiedergegeben werden.

Eine leichte Überlegung zur Darstellung (19) zeigt, daß der Grad von $X_n$ in $n$ höchstens zwei sein kann. Daraus ergeben sich folgende Möglichkeiten:

I. *Der Grad von $X_n$ ist* 2.

Für $\nu = 1$ folgt dann aus (19)[7]

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{X_n + F_{1n}}{X_{n+1}} = \frac{(n - a_1)(a_2 - n)}{(n - b_1)(b_2 - n)};$$

die Lösung dieser Rekursion ist

$$p_n = \frac{\Gamma(n - a_1)\,\Gamma(b_2 + 1 - n)}{\Gamma(n - b_1)\,\Gamma(a_2 + 1 - n)},$$

so daß das allgemeine Polynom die Form

$$F_{\nu n} = \frac{\Gamma(n-b_1)\,\Gamma(a_2+1-n)}{\Gamma(n-a_1)\,\Gamma(b_2+1-n)} \cdot \Delta^\nu \left\{ \frac{\Gamma(n-a_1)\,\Gamma(b_2-n+\nu+1)}{\Gamma(n-\nu-b_1)\,\Gamma(a_2+1-n)} \right\} \tag{20}$$

hat. Diese Polynome können aber bereits durch die *verallgem. Tschebyschew'schen Interpolationspolynome* ausgedrückt werden: aus (11) folgt

$$y_{\nu n}^{(1)} = \frac{(-1)^\nu\,\Gamma(n-A+1)\,\Gamma(B-n+1)}{(\alpha+1;1;\nu)\,(\beta+1;1;\nu)\,\Gamma(n-A+\beta+1)\,\Gamma(B-n+\alpha+1)} \cdot$$

$$\cdot \Delta^\nu \left\{ \frac{\Gamma(n-A+\beta+1)\,\Gamma(B-n+\alpha+\nu+1)}{\Gamma(n-A-\nu+1)\,\Gamma(B-n+1)} \right\}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, N \tag{21}$$

und zur Übereinstimmung mit (20) muß nur

---

[7] Diese Wahl der Vorzeichen von $n$ ist im Hinblick auf die in die Konstanten $a_i$ $b_i$ eingehenden Intervallsgrenzen zweckmäßig.

$$a_1 = A - \beta - 1, \quad b_1 = A - 1, \quad C_\nu = (-1)^\nu (\alpha + 1; 1; \nu)\,(\beta + 1; 1; \nu)$$
$$a_2 = B, \qquad\qquad b_2 = B + \alpha,$$

gesetzt werden[8]. Die vier Größen $\alpha$, $\beta$, $A$ und $B$, durch die $a_1$, $a_2$, $b_1$ und $b_2$ ausgedrückt werden, unterliegen allerdings noch gewissen Einschränkungen ($B - A$ positiv ganz, $\alpha$, $\beta > -1$), die sich auf die $a_1$, $a_2$, $b_1$ und $b_2$ folgendermaßen übertragen: $a_2 - b_1$ positiv ganz, $a_1 - A < 0$ und $b_2 - B > -1$. Diese Bedingungen ergeben sich aber unmittelbar aus den Polynomen (20), wie eine einfache Überlegung zeigt[9], wenn man deren Orthogonalität bezüglich der Gewichtsfunktion $p_n$ im endlichen Intervall $(A, B)$ ($B - A$ positiv ganz) verlangt.

II. *Der Grad von $X_n$ ist* 1

In diesem Fall sind zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten zu untersuchen: Für $\nu = 1$ ergibt sich aus (19)

$$\text{II.}\ \frac{p_{n+1}}{p_n} = C\,\frac{n-a}{n-b}, \qquad \text{IIa.}\ \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{C}{n-b}.$$

Bei II erhält man die Lösung

$$p_n = C^n\,\frac{\Gamma(n-a)}{\Gamma(n-b)}$$

und daher die allgemeinen Polynome

$$F_{\nu n} = \frac{\Gamma(n-b)}{\Gamma(n-a)}\,C^{-n}\,\Delta^\nu\left\{C^n\,\frac{\Gamma(n-a)}{\Gamma(n-b-\nu)}\right\}. \tag{22}$$

Diese Polynome stimmen mit den *Elementen der Laguerreschen Matrizen* in (14), die in etwas geänderter Form lauten

$$y^{(\mathrm{II})}_{\nu n} = \frac{e^n\,\Gamma(n-A+1)}{(\alpha+1; 1; \nu)\,\Gamma(n-A+\alpha+1)}\,\Delta^\nu\left\{e^{-n}\,\frac{\Gamma(n-A+\alpha+1)}{\Gamma(n-A-\nu+1)}\right\}, \tag{23}$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

überein, wenn man

---

[8] Das Zeichen $(a; b; \nu)$ ist folgendermaßen erklärt $a(a + b) \ldots (a + (\nu - 1)\,b)$.

[9] Man schreibt die Orthogonalitätsbedingungen (2) für die Polynome (20) an, ersetzt den Faktor mit dem größeren Index $F_{\nu n}$ durch die Formel von Rodrigues und löst die so entstehende Differenz mit wiederholt angewandter partieller Summation auf. Die dabei entstehenden Glieder müssen an den Grenzen $A$ und $B + 1$ verschwinden, was nur bei Erfüllung der oben genannten Bedingungen der Fall ist.

$$C = \frac{1}{e},\ a = A - \alpha - 1,\ b = A - 1,\ C_\nu = (\alpha + 1; 1; \nu)$$

setzt. Der Bedingung $\alpha > -1$ entspricht wieder die Forderung $a - A < 0$, die sich ebenso wie im Fall I direkt aus den Polynomen (22) ergibt, wenn man deren Orthogonalität bezüglich der Gewichtsfunktion $p_n$ im Intervall $(A, \infty)$ verlangt.

Für IIa ergibt sich die Lösung

$$p_n = \frac{C^n}{\Gamma(n-b)},$$

mit der man die allgemeinen Polynome

$$F_{\nu n} = \Gamma(n-b)\, C^{-n}\, \Delta^\nu \left\{ \frac{C^n}{\Gamma(n-b-\nu)} \right\} \tag{24}$$

findet, die mit den Polynomen (17) von *Charlier*

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} = \frac{a^n\, \Gamma(n-A+1)}{\nu!}\, \Delta^\nu \left\{ \frac{a^{-n}}{\Gamma(n-A-\nu+1)} \right\}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

übereinstimmen, wenn man $C = 1/a$, $b = A - 1$ und $C_\nu = \nu!$ setzt.

III. *Der Grad von* $X_n$ *ist* 0

Für $\nu = 1$ erhält man aus (19)

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = C(n-a)$$

mit der Lösung

$$p_n = C^n\, \Gamma(n-a)$$

und den allgemeinen Polynomen

$$F_{\nu n} = \frac{C^{-n}}{\Gamma(n-a)}\, \Delta^\nu \{ C^n\, \Gamma(n-a) \}. \tag{26}$$

Setzt man etwa $C = b$, $a = A - 1$ und $C_\nu = \nu!$, dann entstehen daraus die Polynome

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{III})} = \frac{b^{-n}}{\nu!(n-A)!}\, \Delta^\nu \{ b(n-A)! \} = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{\nu-k} \binom{n-A+k}{k} \frac{b^k}{(\nu-k)!},$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{26'}$$

die sich durch eine einfache Transformation, wie im § 3 noch besprochen werden soll, in die Polynome von Charlier (18) verwandeln lassen.

Damit sind alle Möglichkeiten für die Funktionen $p_n$ und Polynome $X_n$ in (19) erschöpfend behandelt; mit anderen Worten, jedes Polynomsystem, das einer Rodriguesformel der Art (19) genügt und bezüglich der Gewichtsfunktion $p_n$ im Intervall $(A, B)$ bzw. $(A, \infty)$ orthogonal ist, muß unter den drei angegebenen Fällen I, II und IIa enthalten sein.

3. Die klassischen orthogonalen Polynome, im Zusammenhang mit der Formel von Rodrigues, findet man von *F. G. Tricomi* in den Vorlesungen über Orthogonalreihen [5] folgendermaßen zusammengestellt:

Die Funktion

$$y_n(x) = \frac{1}{C_n\, p(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{p(x)\, [X(x)]^n\}$$

mit einem Polynom $X(x)$ und einer Gewichtsfunktion $p(x)$ ist dann und nur dann ein bezüglich dieser Gewichtsfunktion im Intervall $(a, b)$ orthogonales Polynom vom Grade $n$ in $x$, wenn

$$X(x) = (x - a)\,(b - x);\ p(x) = (x - a)^\beta\,(b - x)^\alpha;\ C_n = (-2)^n\, n!;$$

$$\alpha > -1, \beta > -1;\ \text{endliches Grundintervall } |a| < \infty,\ |b| < \infty;$$

$$X(x) = x - a; \qquad p(x) = e^{-x}(x - a)^\alpha; \qquad C_n = n!;$$

$$\alpha > -1;\ \text{einseitig unendliches Grundintervall } |a| < \infty,\ b = \infty;$$

$$X(x) = 1; \qquad p(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}; \qquad C_n = (-1)^n;$$

beiderseitig unendliches Grundintervall $a = -\infty$, $b = \infty$

ist. In dieser Reihenfolge sind das die *Jakobischen*, *Laguerreschen* und *Hermiteschen* Polynome.

Diesen klassischen orthogonalen Polynomen entspricht dann als Übersetzung in die Differenzenrechnung:

Der Ausdruck

$$y_{\nu n} = \frac{1}{C_\nu\, p_n} \Delta^\nu \{p_n \cdot X_n \cdot X_{n-1} \cdot \ldots \cdot X_{n-\nu+1}\},$$

in dem $X_n$ ein Polynom in $n$ und $p_n$ eine Gewichtsfunktion in $n$ bedeutet, ist dann und nur dann ein bezüglich dieser Gewichtsfunktion im Intervall $(A, B)$ orthogonales Polynom vom Grade $\nu$ in $n$, wenn

$$X_n = (n - A)\,(B - n + \alpha + 1);\ p_n = \binom{n-A+\beta}{n-A}\binom{B-n+\alpha}{B-n};$$

$$\alpha, \beta > -1;\ C_\nu = (-1)^\nu\,(\alpha + 1; 1; \nu)\,(\beta + 1; 1; \nu);$$

endliches Grundintervall $|A| < \infty$, $|B| < \infty$, $B - A$ positiv ganz;

$X_n = n - A$; a) $p_n = e^{-n}\binom{n-A+\alpha}{n-A}$; $\alpha > -1$; $C_\nu = (\alpha+1; 1; \nu)$;

einseitig unendliches Grundintervall $|A| < \infty$, $B = \infty$;

b) $p_n = \dfrac{a^{-n}}{(n-A)!}$; $a > 0$; $C_\nu = \nu!$;

einseitig unendliches Grundintervall $|A| < \infty$, $B = \infty$

ist[10]. Das sind die *verallgemeinerten Tschebyschew'schen Interpolationspolynome*, die *Elemente der Laguerreschen Matrizen* und die Polynome von *Charlier*.

Als besonders wichtiges Resultat erscheint die Tatsache, daß in diesem Sinne eine Übersetzung der *Hermiteschen* Polynome nicht möglich ist.

## § 2. Beziehungen zwischen den Polynomen dieser Orthogonalsysteme

1. Normierung — 2. Rekursionsformel — 3. Differenzengleichung — 4. Summenformel von Christoffel — 5. Erzeugende Polynome — 6. Abschätzung der Polynome

In allen folgenden Ausführungen werden zur Vereinfachung der Formeln 0 und $N$ ($N$ ganz) bzw. 0 und $\infty$ als Grenzen der Grundintervalle verwendet, da man durch die einfache Transformation von $n$ in $n - A$ und durch Ersetzen von $N$ durch $B - A$ sofort auf die allgemeineren Grundintervalle übergehen kann.

1. Die Normierung der Polynome I, II und IIa erfolgt am einfachsten durch Anwendung der partiellen Summation (6) auf (2) unter Heranziehung der Formel von Rodrigues. Man erhält so

$$\sigma_\nu^{(\mathrm{I})} = \sum_{n=0}^{N} \binom{n+\beta}{n}\binom{N-n+\alpha}{N-n}\, y_{\nu n}^{(\mathrm{I})^2} = (-1)^\nu \sum_{n=0}^{N} y_{\nu n}^{(\mathrm{I})}\, \Delta^\nu \left\{\binom{n+\beta}{n-\nu}\binom{N-n+\nu+\alpha}{N-n}\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \binom{n+\nu+\beta}{n}\binom{N-n+\alpha}{N-n-\nu}\, \Delta^\nu\, y_{\nu n}^{(\mathrm{I})},$$

da sich die anderen, bei der partiellen Summation entstehenden Glieder, wegheben. Die $\nu$-te Differenz dieser Polynome (I) ist

$$\Delta^\nu\, y_{\nu n}^{(\mathrm{I})} = a_{\nu\nu} = \frac{(\alpha+\beta+\nu+1; 1; \nu)\,\nu!}{(\alpha+1; 1; \nu)\,(\beta+1; 1; \nu)}, \tag{27}$$

so daß nach Berechnung der verbleibenden Summe[11] schließlich

---

[10] Die $C_n$ bzw. $C_\nu$ können natürlich noch verallgemeinert werden (vgl. Anm. 3); die $C_\nu$ sind hier entsprechend der für die $C_n$ üblichen Art angegeben.

[11] Die Berechnung dieser Summen ist ausführlich in [3] und [4] angegeben.

$$\sigma_\nu^{(I)} = \frac{(\alpha+\beta+\nu+1;1;\nu)\,\nu!}{(\alpha+1;1;\nu)\,(\beta+1;1;\nu)} \binom{N+\alpha+\beta+\nu+1}{N-\nu}, \quad \nu=0,1,2,\ldots,N \tag{28}$$

als Normierungsfaktor entsteht.

Im Fall (II) findet man

$$\sigma_\nu^{(II)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\binom{n+\alpha}{n}\, y_{\nu n}^{(II)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} y_{\nu n}^{(II)}\, \Delta^\nu \left\{e^{-n}\binom{n+\alpha}{n-\nu}\right\} =$$

$$= (-1)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n-\nu}\binom{n+\alpha+\nu}{n}\, \Delta^\nu\, y_{\nu n}^{(II)},$$

und da die $\nu$-te Differenz dieser Polynome (II)

$$\Delta^\nu\, y_{\nu n}^{(II)} = a_{\nu\nu} = \frac{(\frac{1}{e}-1)\,\nu!}{(\alpha+1;1;\nu)} \tag{29}$$

ist, ergibt sich nach Berechnung der Summe der Normierungsfaktor

$$\sigma_\nu^{(II)} = \frac{e^{\alpha+1}\,\nu!}{(\alpha+1;1;\nu)\,(e-1)^{\alpha+1}\,e^\nu}, \quad \nu=0,1,2,\ldots. \tag{30}$$

Im dritten Fall (IIa) findet man

$$\sigma_\nu^{(IIa)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{-n}}{n!}\, y_{\nu n}^{(IIa)^2} = \frac{1}{\nu!} \sum_{n=0}^{\infty} y_{\nu n}^{(IIa)}\, \Delta^\nu \left\{\frac{a^{-n}}{(n-\nu)!}\right\} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{-n-\nu}}{n!}\, \Delta^\nu\, y_{\nu n}^{(IIa)},$$

und mit der $\nu$-ten Differenz der Polynome (IIa)

$$\Delta^\nu\, y_{\nu n}^{(IIa)} = a_{\nu\nu} = (-1)^\nu \tag{31}$$

nach Berechnung der Summe

$$\sigma_\nu^{(IIa)} = \frac{e^{\frac{1}{a}}}{\nu!\,a^\nu}, \quad \nu=0,1,2,\ldots. \tag{32}$$

Setzt man mit Hilfe der Normierungsfaktoren und Gewichtsfunktionen

$$r_{\nu n} = \sqrt{\frac{p_n}{\sigma_\nu}}\, y_{\nu n},$$

dann bilden die Polynome $r_{\nu n}$ ein normiertes und orthogonales System, für das

$$\sum_{n=A}^{B} r_{\nu n}\, r_{\mu n} = \begin{cases} 0 \text{ für } \nu \neq \mu \\ 1 \text{ für } \nu = \mu \end{cases}$$

gilt. Die drei normierten Orthogonalsysteme I, II und IIa werden daher durch die Polynome

$$r_{\nu n}^{(\mathrm{I})} = \sqrt{\frac{(N-\nu)!\,(\alpha+1;1;N-n)(\beta+1;1;n)\,(\alpha+1;1;\nu)\,(\beta+1;1;\nu)}{(N-n)!\,n!\,\nu!\,(\alpha+\beta+2\,\nu+2;1;N-\nu)\,(\alpha+\beta+\nu+1;1;\nu)}} \cdot \sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^k \binom{\nu}{k} \binom{n}{\nu-k} \binom{N-n}{k}}{\binom{\beta+\nu-k}{\nu-k} \binom{\alpha+k}{k}},$$

Bedingungen für die Größen wie in (12),

$$r_{\nu n}^{(\mathrm{II})} = \sqrt{\frac{\nu!(\alpha+1;1;n).(e-1)^{\alpha+1}\,e^{\nu}}{n!\,e^{n+\alpha+1}\,(\alpha+1;1;\nu)}} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{\nu-k}\, e^{-k} \binom{n+\alpha+k}{k} \binom{n}{\nu-k},$$

Bedingungen für die Größen wie in (15),

$$r_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} = \sqrt{\frac{\nu!}{n!\,e^{a}\,a^{n+\nu}}} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{a^k}{(\nu-k)!},$$

gebildet. Bedingungen für die Größen wie in (18),

2. Für die folgenden Ausführungen wird es zweckmäßig sein, neben der in (1) angegebenen allgemeinen Form der Polynome $y_{\nu n}$

$$y_{\nu n} = a_{\nu 0} + \binom{n}{1} a_{\nu 1} + \ldots + \binom{n}{\nu-1} a_{\nu,\nu-1} + \binom{n}{\nu} a_{\nu\nu},$$

diese auch noch in anderer Gestalt, nämlich nach steigenden Potenzen von $n$ geordnet, anzugeben:

$$y_{\nu n} = b_{\nu 0} + b_{\nu 1}\, n + \ldots + b_{\nu,\nu-1}\, n^{\nu-1} + b_{\nu\nu}\, n^{\nu}, \quad n, \nu = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{33}$$

In dieser zweiten Art geben wir noch zum praktischen Gebrauch die ersten Polynome an:

$$y_{0n}^{(\mathrm{I})} = 1,$$

$$y_{1n}^{(\mathrm{I})} = -\frac{N}{\alpha+1} + \frac{(\alpha+\beta+2)}{(\alpha+1)\,(\beta+1)}\, n,$$

$$y_{2n}^{(\mathrm{I})} = \frac{N(N-1)}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)} + \frac{-\alpha^2+\beta^2-3\alpha+3\beta-2N\beta^2-2N\alpha\beta-4N\alpha-10N\beta-12N}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(\beta+1)\,(\beta+2)}\, n + \frac{\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\beta+7\,\alpha+7\,\beta+12}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(\beta+1)\,(\beta+2)}\, n^2$$

. . . . . .

$$y_{on}^{(II)} = 1,$$

$$y_{1n}^{(II)} = \frac{1}{e} + \frac{1-e}{e(\alpha+1)}\, n,$$

$$y_{2n}^{(II)} = \frac{1}{e^2} + \frac{2\,\alpha+3-2\,e\,\alpha-2\,e-e^2}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,e^2}\, n + \frac{(1-e)^2}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,e^2}\, n^2,$$

. . . . . .

$$y_{on}^{(IIa)} = 1,$$

$$y_{1n}^{(IIa)} = \frac{1}{a} - n,$$

$$y_{2n}^{(IIa)} = \frac{1}{2\,a^2} - \frac{2+a}{2\,a}\, n + \frac{1}{2}\, n^2,$$

. . . . . .

Die Herleitung einer Rekursionsformel für die orthogonalen Polynome nach Tricomi[12] kann ohne Änderung auch für die in der Differenzenrechnung definierten Polynome I, II und IIa erfolgen. Man geht von der Darstellung (33) aus und bildet mittels zweier aufeinanderfolgender Polynome mit nur von $\nu$ abhängenden Größen $A_\nu, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu$

$$y_{\nu+1,n} - A_\nu\, n\, y_{\nu n} = \gamma_0\, y_{\nu n} + \gamma_1\, y_{\nu-1,n} + \ldots + \gamma_\nu\, y_{on}. \tag{34}$$

Multipliziert man (34) mit $p_n\, y_{kn}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 2)$ und summiert von $A$ bis $B$, dann verschwinden auf Grund der Orthogonalität die linken Seiten und rechts muß daher für $k = 0$ das $\gamma_\nu = 0$, für $k = 1$ das $\gamma_{\nu-1} = 0$ usw., schließlich für $k = \nu - 2$ das $\gamma_2 = 0$ sein. Somit bleiben nur drei aufeinanderfolgende Polynome, die nach Bestimmung des $\gamma_0$, $\gamma_1$ und $A_\nu$ die Rekursionsformel bilden.

Die rechte Seite von (34) kann, da $\gamma_0$ und $\gamma_1$ bezüglich $n$ konstant sind, in $n$ höchstens den Grad $\nu$ haben; daher muß das $A_\nu$ so beschaffen sein, daß sich auf der linken Seite von (34) das Glied mit $n^{\nu+1}$ weghebt. Auf Grund dieser Forderung findet man

$$A_\nu = \frac{b_{\nu+1,\nu+1}}{b_{\nu\nu}}. \tag{35}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von $n^\nu$ auf beiden Seiten von (34) ergibt sich das $\gamma_0$:

[12] Siehe [5], Seite 126 und 127.

$$\gamma_0 = \frac{b_{\nu+1,\nu}}{b_{\nu\nu}} - \frac{b_{\nu+1,\nu+1}\, b_{\nu,\nu-1}}{b_{\nu\nu}^2} \; (= B_\nu) \tag{36}$$

Zuletzt bleibt die Festlegung des $\gamma_1$; aus

$$\gamma_1\, y_{\nu-1,n} = y_{\nu+1,n} - (A_\nu\, n + \gamma_0)\, y_{\nu n}$$

folgt durch Multiplikation mit $p_n\, y_{\nu-1,n}$ und Summation von $A$ bis $B$

$$\gamma_1\, \sigma_{\nu-1} = -\, A_\nu\, \frac{b_{\nu-1,\nu-1}}{b_{\nu\nu}}\, \sigma_\nu,$$

und daher

$$\gamma_1 = -\, \frac{\sigma_\nu}{\sigma_{\nu-1}}\, \frac{b_{\nu+1,\nu+1}\, b_{\nu-1,\nu-1}}{b_{\nu\nu}^2} \; (= -\, C_\nu). \tag{37}$$

Die Rekursionsformel hat dann mit den in (35), (36) und (37) angegebenen Größen die Gestalt

$$y_{\nu+1,n} - [A_\nu\, n + B_\nu]\, y_{\nu n} + C_\nu\, y_{\nu-1,n} = 0 \tag{38}$$

und gilt für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ und $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, wenn man $y_{-1,n} = 0$ setzt.

Zur Anwendung dieses Verfahrens bei unseren Polynomen müssen zunächst die letzten beiden Koeffizienten in der Definitionsform (33) bestimmt werden. Der letzte Koeffizient $b_{\nu\nu}$ geht aus $a_{\nu\nu}$, das bereits in (27), (29) und (31) angegeben wurde, mittels Division durch $\nu!$ hervor

$$b_{\nu\nu} = \frac{a_{\nu\nu}}{\nu!},$$

während die Berechnung des vorletzten Koeffizienten in den einzelnen Fällen

$$b^{(\mathrm{I})}_{\nu,\nu-1} = \frac{\nu[(\beta-\alpha)\,(\nu-1) - 2\,N(\beta+\nu)]\,(\alpha+\beta+\nu+1;\,1;\,\nu-1)}{2(\alpha+1;\,1;\,\nu)\,(\beta+1;\,1;\,\nu)},$$

$$b^{(\mathrm{II})}_{\nu,\nu-1} = \frac{\nu(1-e)^{\nu-1}\,[(\nu-1)\,(e+1) + 2(\alpha+1)]}{2\,e^{\nu}\,(\alpha+1;\,1;\,\nu)},$$

$$b^{(\mathrm{IIa})}_{\nu,\nu-1} = \frac{(-1)^{\nu-1}\,[2+a(\nu-1)]}{2\,a(\nu-1)!}$$

ergibt. Mit diesen letzten Koeffizienten findet man die Rekursionsformeln

$$(\alpha+\nu+1)\,(\beta+\nu+1)\,(\alpha+\beta+\nu+1)\,(\alpha+\beta+2\,\nu)\,y^{(\mathrm{I})}_{\nu+1,n} - (\alpha+\beta+2\,\nu+1)\cdot$$
$$\cdot[(\alpha+\beta+2\,\nu+2)\,(\alpha+\beta+2\,\nu)\,n + (\alpha+\beta+\nu+1)\,(\beta-\alpha-2\,N)\,\nu - (\alpha+\beta)\,(\beta+$$
$$+1)\,N]\,y^{(\mathrm{I})}_{\nu n} + \nu(\alpha+\beta+2\,\nu+2)\,(N+\alpha+\beta+\nu+1)\,(N-\nu+1)\,y^{(\mathrm{I})}_{\nu-1,n} = 0,$$

$$(\alpha+\nu+1)\, y^{(\mathrm{II})}_{\nu+1,\,n} + [n-\nu-\frac{1}{e}(n+\nu+\alpha+1)]\, y^{(\mathrm{II})}_{\nu n} + \frac{\nu}{e}\, y^{(\mathrm{II})}_{\nu-1,\,n} = 0,$$

$$a(\nu+1)\, y^{(\mathrm{IIa})}_{\nu+1,\,n} + (an-a\nu-1)\, y^{(\mathrm{IIa})}_{\nu n} + y^{(\mathrm{IIa})}_{\nu-1} = 0,$$

$$\nu, n = 0, 1, 2, \ldots, N \text{ ($N$ positiv ganz oder unendlich),}$$

wenn man $y_{-1,\,n} = 0$ setzt[13].

3. Die Ableitung der Differenzengleichungen, das heißt eigentlich Rekursionsformeln bezüglich $n$, erfolgt am besten mit Hilfe der Formel von Rodrigues. Diesmal sind allerdings gewisse Modifikationen gegenüber dem von Tricomi für die Differentialgleichungen angegebenen Weg[14] nötig.

Aus der Rodriguesformel (19) konnte man schließen, daß $X_n$ in $n$ höchstens den Grad zwei haben kann; daher gilt für die $(\nu+1)$-te Differenz des folgenden Ausdruckes einerseits

$$\Delta^{\nu+1}[X_{n-\nu+1}\, \Delta\{p_n X_n X_{n-1} \ldots X_{n-\nu+1}\}] = C_\nu[X_{n+2}\, \Delta^2(y_{\nu n}\, p_n) + (\nu+1) \cdot \Delta X_{n+1}\, \Delta(y_{\nu n}\, p_n) + \binom{\nu+1}{2} \Delta^2 X_n \cdot y_{\nu n}\, p_n]. \tag{39}$$

Löst man andererseits zuerst die Differenz in der eckigen Klammer aus (39) auf und vollzieht darauf die Zerlegung der $(\nu+1)$-ten Differenz, dann erhält man als zweite Beziehung

$$\Delta^{\nu+1}[X_{n-\nu+1}\, \Delta\{p_n X_n X_{n-1} \ldots X_{n-\nu+1}\}] = C_\nu\{[C_1\, y_{1,\,n+\nu+1} + \Delta X_{n+\nu} + \ldots + \Delta X_{n+2}]\, \Delta(y_{\nu n}\, p_n) + (\nu+1)\, [C_1\, \Delta\, y_{1,\,n+\nu} + \Delta^2 X_{n+\nu-1} + \ldots + \Delta^2 X_{n+1}] \cdot y_{\nu n}\, p_n. \tag{40}$$

Aus dem Vergleich der beiden Formeln (39) und (40) entsteht nach einigen elementaren Umrechnungen die Differenzengleichung

$$\Delta^2 y_{\nu n} \cdot X_{n+2}\, p_{n+2} + \Delta\, y_{\nu n}\{2\, X_{n+2}\, p_{n+2} + M\} + y_{\nu n}\{X_{n+2}\, p_{n+2} + M + N\} = 0,$$

$$M = p_{n+1}[\nu\, \Delta\, X_{n+1} - X_{n+1} - \frac{X_{n+\nu+2}\, p_{n+\nu+2}}{p_{n+\nu+1}}], \tag{41}$$

$$N = p_n[\binom{\nu+1}{2} \Delta^2 X_n + (\nu+1) \frac{X_{n+\nu+1}\, p_{n+\nu+1}}{p_{n+\nu}} - \nu \frac{X_{n+\nu+2}\, p_{n+\nu+2}}{p_{n+\nu+1}}],$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots, N-2,$$

---

[13] Diese Festsetzung ist allerdings nur für die Polynome IIa nötig.

[14] Siehe [5], Seite 133 bis 135.

und daraus die einfache Rekursionsformel bezüglich $n$

$$X_{n+2}\, p_{n+2}\, y_{\nu,n+2} + M\, y_{\nu,n+1} + N\, y_{\nu n} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-2. \tag{41'}$$

Für die Polynome I, II und IIa findet man mit diesem Verfahren die Differenzengleichungen

$$\Delta^2 y_{\nu n}^{(\mathrm{I})}\,(n+\beta+2)\,(N-n-1) + \Delta\, y_{\nu n}^{(\mathrm{I})}\,[\nu(\nu-1) + N(\beta+1) + (\alpha+\beta+2)\,(\nu-n-1)] + y_{\nu n}^{(\mathrm{I})}\,\nu(\alpha+\beta+\nu+1) = 0, \tag{42}$$

$$\Delta^2 y_{\nu n}^{(\mathrm{II})}(n+\alpha+2) + \Delta\, y_{\nu n}^{(\mathrm{II})}\,[\alpha+1+(1-e)\,(n-\nu+1)] + y_{\nu n}^{(\mathrm{II})}\,\nu(e-1) = 0, \tag{43}$$

$$\Delta^2 y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} + \Delta\, y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})}\,[1 - a(n-\nu+1)] + y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})}\, a\,\nu = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, N, \; n = 0, 1, 2, \ldots, N-2, \tag{44}$$

beziehungsweise die Rekursionsformeln bezüglich $n$, die im Gegensatz zu (41') in $y_{\nu,n+1}$, $y_{\nu n}$ und $y_{\nu,n-1}$ angeschrieben werden

$$(n+\beta+1)\,(N-n)\, y_{\nu,n+1}^{(\mathrm{I})} + [n(\beta-\alpha+2\,n) + \nu(\alpha+\beta+\nu+1) - N(\beta+2\,n+1)]\, y_{\nu n}^{(\mathrm{I})} + n(\alpha+N-n+1)\, y_{\nu,n-1}^{(\mathrm{I})} = 0, \tag{42'}$$

$$(n+\alpha+1)\, y_{\nu,n+1}^{(\mathrm{II})} + [e(\nu-n)-\nu-\alpha-n-1]\, y_{\nu n}^{(\mathrm{II})} + e\,n\, y_{\nu,n-1}^{(\mathrm{II})} = 0, \tag{43'}$$

$$y_{\nu,n+1}^{(\mathrm{IIa})} + [a(\nu-n) - 1]\, y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} + a\,n\, y_{\nu,n-1}^{(\mathrm{IIa})} = 0, \tag{44'}$$

für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, N$ und $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

($N$ positiv ganz oder unendlich).

4. Die Summenformel von Christoffel erhält man durch Anwendung der Rekursionsformel (38) auf die folgende Differenz

$$y_{k+1,n}\, y_{km} - y_{kn}\, y_{k+1,m} = A_k(n-m)\, y_{kn}\, y_{km} + C_k[y_{kn}\, y_{k-1,m} - y_{k-1,n}\, y_{km}];$$

ersetzt man darin $C_k$ nach (37) durch $\dfrac{\sigma_k\, A_k}{\sigma_{k-1}\, A_{k-1}}$, dann entsteht daraus

$$\frac{1}{\sigma_k}\, y_{kn}\, y_{km}\,(n-m) = \frac{1}{\sigma_k\, A_k}\,(y_{k+1,n}\, y_{km} - y_{kn}\, y_{k+1,m}) - \frac{1}{\sigma_{k-1}\, A_{k-1}}\,(y_{kn}\, y_{k-1,m} - y_{k-1,n}\, y_{km}).$$

Wird $A_k$ noch nach (35) ersetzt und die bereits im Punkt 2 dieses Paragraphen gemachte Voraussetzung $y_{-1,n} = 0$ berücksichtigt, dann folgt nach Summation dieser Gleichung von $k = 0$ bis $k = \nu$

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{y_{kn}\, y_{km}}{\sigma_k} = \frac{b_{\nu\nu}(y_{\nu+1,n}\, y_{\nu m} - y_{\nu n}\, y_{\nu+1,m})}{\sigma_\nu\, b_{\nu+1,\nu+1}\,(n-m)},$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots, N, \quad n \neq m, \tag{45}$$

da sich alle oben rechts stehenden Glieder bis auf das letzte wegheben.

In unseren drei Fällen nimmt daher die Summenformel von Christoffel folgende Gestalt an

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{y_{kn}^{(\mathrm{I})}\, y_{km}^{(\mathrm{I})}\,(N-k)!\,(\alpha+1;1;k)\,(\beta+1;1;k)}{k!(\alpha+\beta+k+1;1;k)\,(\alpha+\beta+2\,k+2;1;N-k)} =$$
$$= \frac{(N-\nu)!\,(\alpha+1;1;\nu+1)\,(\beta+1;1;\nu+1)}{\nu!\,(\alpha+\beta+\nu+2;1;\nu+1)\,(\alpha+\beta+2\,\nu+2;1;N-\nu)} \cdot$$
$$\frac{y_{\nu+1,n}^{(\mathrm{I})}\, y_{\nu m}^{(\mathrm{I})} - y_{\nu n}^{(\mathrm{I})}\, y_{\nu+1,m}^{(\mathrm{I})}}{n-m}, \tag{46}$$

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{y_{kn}^{(\mathrm{II})}\, y_{km}^{(\mathrm{II})}\,(\alpha+1;1;k)\,(1-e)\,e^k!}{k!} =$$
$$= \frac{(\alpha+1;1;\nu+1)\,e^{\nu+1}(y_{\nu+1,n}\, y_{\nu m} - y_{\nu n}\, y_{\nu+1,m})}{\nu!\,(n-m)}, \tag{47}$$

$$\sum_{k=0}^{\nu} y_{kn}^{(\mathrm{IIa})}\, y_{km}^{(\mathrm{IIa})}\, a^k\, k! = \frac{a^\nu(\nu+1)!\,(y_{\nu+1,n}\, y_{\nu m} - y_{\nu n}\, y_{\nu+1,m})}{m-n}, \tag{48}$$

$\nu, n, m = 0, 1, 2, \ldots, N$, $n \neq m$ ($N$ positiv ganz oder unendlich).

5. Ist ein Polynom in $\nu$ und $z$ folgendermaßen definiert

$$P_{\nu z} = \sum_{n=0}^{z} (-1)^n \binom{z}{n} y_{\nu n}, \qquad \begin{matrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ z = 0, 1, 2, \ldots, N, \end{matrix} \tag{49}$$

dann nennt man $P_{\nu z}$ ein die Polynome $y_{\nu n}$ erzeugendes Polynom. Ebenso kann ein erzeugendes Polynom in $n$ und $z$ definiert werden

$$P_{nz} = \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} y_{\nu n}, \qquad \begin{matrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ z = 0, 1, 2, \ldots. \end{matrix} \tag{49'}$$

Solche erzeugende Polynome lassen sich aus den Rekursionsformeln herleiten; und zwar erzeugende Polynome in $\nu$ und $z$ aus Rekursionsformeln bezüglich $n$ (Differenzengleichungen — Punkt 3), erzeugende Polynome in $n$ und $z$ aus Rekursionsformeln bezüglich $\nu$ (Punkt 2). Verwendet man nämlich die Beziehungen

$$(z+1)\, P_{\nu z} = \sum_{n=0}^{z} (-1)^n\,(n+1)\left[\binom{z}{n+1} + \binom{z}{n}\right] y_{\nu n}, \tag{50}$$

$$(z+1)\,\Delta\,P_{\nu z} = \sum_{n=1}^{z+1}(-1)^n\, n[\binom{z}{n} + \binom{z}{n-1}]\, y_{\nu n}, \tag{50'}$$

$$(z+1)\,{}^2\Delta\,P_{\nu z} = \sum_{n=1}^{z+1}(-1)^n\, n[(n+1)\binom{z}{n+1} + (2n+1)\binom{z}{n} + n\binom{z}{n-1}]\, y_{\nu n}, \tag{50''}$$

(beziehungsweise dieselben Formeln für $P_{nz}$) dazu, die in den Rekursionsformeln stehenden $y_{\nu n}$, $y_{\nu-1,n}$ und $y_{\nu+1,n}$ ($y_{\nu n}$, $y_{\nu,n+1}$ und $y_{\nu,n-1}$) durch die erzeugenden Polynome auszudrücken, dann erhält man Differenzengleichungen für die $P_{\nu z}$ ($P_{nz}$), deren Lösungen diese erzeugenden Polynome sind.

Im Fall II soll dies ausführlich für das $P^{(\mathrm{II})}_{\nu z}$ gezeigt werden. Multipliziert man die Rekursionsformel (43') mit $(-1)^n \binom{z}{n}$ und summiert von $n = 0$ bis $n = z$, so erhält man

$$\sum_{n=0}^{z}(-1)^n \binom{z}{n}\,[(n+1)\,y^{(\mathrm{II})}_{\nu,n+1} - n\,y^{(\mathrm{II})}_{\nu n} + \alpha\,y^{(\mathrm{II})}_{\nu,n+1} + \{e(\nu+1)-\nu-\alpha-1\}\,y^{(\mathrm{II})}_{\nu n} + e\,n\,y^{(\mathrm{II})}_{\nu,n-1} - e(n+1)\,y^{(\mathrm{II})}_{\nu n}] = 0.$$

Die Formeln (50) und (50') anwendend, entsteht für $P^{(\mathrm{II})}_{\nu z}$ die Differenzengleichung erster Ordnung

$$(z+1)\,\Delta\,P^{(\mathrm{II})}_{\nu z} + \alpha\,\Delta\,P^{(\mathrm{II})}_{\nu z} - [e(\nu+1)-\nu-\alpha-1)]\,P^{(\mathrm{II})}_{\nu z} - e.(z+1)\,P^{(\mathrm{II})}_{\nu z} = 0,$$

die sich auf die einfache Rekursionsformel erster Ordnung

$$(\alpha+z+1)\,P^{(\mathrm{II})}_{\nu,z+1} = (\nu-z)\,(e-1)\,P^{(\mathrm{II})}_{\nu z}$$

reduzieren läßt. Die Lösung dieser Rekursionsformel, deren Anfangsglied

$$P^{(\mathrm{II})}_{\nu 0} = y^{(\mathrm{II})}_{\nu 0} = e^{-\nu}$$

sein muß, ist das erzeugende Polynom

$$P^{(\mathrm{II})}_{\nu z} = \sum_{n=0}^{z}(-1)^n \binom{z}{n} y^{(\mathrm{II})}_{\nu n} = \frac{(\nu-z+1;1;z)\,(e-1)^z}{(\alpha+1;1;z)\,e^{\nu}} \tag{52}$$

für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ und $z = 0, 1, 2, \ldots, \nu$, d. h. $z \leqq \nu$.

In analoger Weise findet man unter Heranziehung der Formel (50'') das erzeugende Polynom

$$P^{(\mathrm{I})}_{\nu z} = \sum_{n=0}^{z}(-1)^n \binom{z}{n} y^{(\mathrm{I})}_{\nu n} = \frac{(-1)^{\nu}\,(N-\nu+1;1;\nu-z)\,(\nu-z+1;1;z)}{(\alpha+1;1;\nu)\,(\beta+1;1;z)} \tag{51}$$

für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, N$ und $z = 0, 1, 2, \ldots, \nu$, d. h. $z \leqq \nu$,

und letzten Endes

$$P_{\nu z}^{(\mathrm{IIa})} = \sum_{n=0}^{z} (-1)^n \binom{z}{n} y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} = \frac{a^{z-\nu}}{(\nu - z)!} \tag{53}$$

für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ und $z = 0, 1, 2, \ldots, \nu$, d. h. $z \leqq \nu$.

Die Herleitung der erzeugenden Polynome $P_{nz}$ ist auf Grund der wesentlich komplizierteren Form der Rekursionsformeln bezüglich $\nu$ schwieriger. Nur im Fall (II) gelingt es, mit den Beziehungen (50) eine zweigliedrige Rekursionsformel für $P_{nz}$ herzuleiten. Man findet, wie oben vorgehend,

$$P_{nz}^{(\mathrm{II})} = \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} y_{\nu n}^{(\mathrm{II})} = \frac{(a+z+1;\, 1;\, n)\,(e-1)^z}{(a+1;\, 1;\, n)\, e^z} \tag{54}$$

für $z, n = 0, 1, 2, \ldots$.

In den beiden anderen Fällen muß zu den Bedingungen (50) noch die folgende

$$\Delta^2 P_{nz} = \sum_{\nu=2}^{z+2} (-1)^\nu \binom{z}{\nu-2} y_{\nu n}$$

hinzugefügt werden, so daß sich für die erzeugenden Polynome $P_{nz}$ nach Anwendung des oben beschriebenen Verfahrens Differenzengleichungen zweiter Ordnung ergeben. Von Interesse ist hiebei nur das Resultat im Falle IIa; für das erzeugende Polynom $P_{nz}^{(\mathrm{IIa})}$ ergibt sich die dreigliedrige Rekursionsformel

$$a(z+2)\, P_{n,\,z+2}^{(\mathrm{IIa})} + (1 - 3a - an - 2az)\, P_{n,\,z+1}^{(\mathrm{IIa})} + a(z+n+1)\, P_{nz}^{(\mathrm{IIa})} = 0,$$

die sich, nach einem vom Verfasser in [6] beschriebenen Verfahren, einfach durch die konfluenten hypergeometrischen Funktionen

$$P_{nz}^{(\mathrm{IIa})} = C_1 a^n \binom{2n}{n} \Phi\left(z+n+1;\, n+1;\, -\frac{1}{a}\right),\quad P_{nz}^{(\mathrm{IIa})'} = C_2 \Phi\left(z+1;\, 1-n;\, -\frac{1}{a}\right)$$

lösen läßt. Nimmt man die erste dieser Lösungen und bestimmt die freie Konstante $C$ aus der Anfangsbedingung

$$P_{no}^{(\mathrm{IIa})} = C\, a^n \binom{2n}{n} e^{-\frac{1}{a}} = y_0^{(\mathrm{IIa})} = 1,$$

dann nimmt das erzeugende Polynom die Gestalt

$$P_{nz}^{(\mathrm{IIa})} = e^{\frac{1}{a}} \Phi\left(z+n+1;\, n+1;\, -\frac{1}{a}\right)$$

an; durch Anwendung der bekannten Transformationsgleichung für die konfluente hypergeometrische Funktion

$$\Phi(a; c; x) = e^x \, \Phi(c - a; c; -x)$$

erhält man daraus schließlich

$$P_{nz}^{(\mathrm{IIa})} = \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} = \Phi(-z; n+1; \frac{1}{a}), \quad z, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{55}$$

6. Mit Hilfe der Normierungsfaktoren lassen sich folgende einfache Abschätzungen für die Polynome I, II und IIa finden: aus

$$y_{\nu n}^2 = \frac{\sigma_\nu}{p_n} r_{\nu n}^2 \leqq \frac{\sigma_\nu}{p_n} \sum_{n=A}^{B} r_{\nu n}^2 = \frac{\sigma_\nu}{p_n}$$

folgt

$$| y_{\nu n} | \leqq \sqrt{\frac{\sigma_\nu}{p_n}} \tag{56}$$

und daher gelten die groben Abschätzungen

$$| y_{\nu n}^{(\mathrm{I})} | \leqq \sqrt{\frac{n!\, \nu!(N-n)!\, (\alpha+\beta+2\nu+2; 1; N-\nu)\, (\alpha+\beta+\nu+1; \nu)}{(N-\nu)!\, (\alpha+1; 1; N-n)\, (\beta+1; 1; n)\, (\alpha+1; 1; \nu)\, (\beta+1; 1; \nu)}}, \tag{57}$$

$$| y_{\nu n}^{(\mathrm{II})} | \leqq \sqrt{\frac{e^{n+\alpha+1}\, \nu!\, n!}{(\alpha+1; 1; n)\, (\alpha+1; 1; \nu)\, e^\nu\, (e-1)^{\alpha+1}}}, \tag{57'}$$

$$| y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} | \leqq \sqrt{\frac{a^n\, n!\, e^{1/a}}{a^\nu\, \nu!}}, \qquad \nu, n = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{57''}$$

## § 3. Vollständigkeit und Beziehungen zu bekannten Polynomsystemen

1. Vollständigkeit der Polynomsysteme I, II und IIa — 2. Untersuchungen zu den Polynomen I und II — 3. Die Polynome von Charlier

1. Ein Polynomsystem, das bezüglich einer Gewichtsfunktion im *endlichen* Grundintervall $N$ orthogonal ist und bei dem die Gradzahlen der Polynome $0, 1, 2, \ldots, N$ betragen, ist stets abgeschlossen und vollständig, während das im unendlichen Grundintervall nicht notwendig der Fall zu sein braucht.

Es bleibt daher die Aufgabe, die Vollständigkeit der Polynomsysteme II und IIa nachzuweisen. Dies kann dadurch geschehen, daß man die normierten Polynome als Elemente einer unendlichen Matrix auffaßt und zeigt, daß sowohl das System der Zeilenvektoren wie das System der Spaltenvektoren dieser unendlichen Matrix ein normiertes

Orthogonalsystem bildet; eine solche Matrix bezeichnet man dann einfach als *unendliche orthogonale Matrix*[15].

In der Arbeit [3] des Verfassers wurde bereits gezeigt, daß die Polynome II diese beiden Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen erfüllen (daher die Bezeichnung „Elemente der Laguerreschen Matrizen"), während der Beweis für die Polynome IIa auf gleiche Art und Weise erbracht werden soll.

Nach den Ausführungen des § 1, Punkt 1 erfüllen die aus den normierten Polynomen $r_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})}$ gebildeten Zeilenvektoren die Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})}\, r_{\mu n}^{(\mathrm{IIa})} = \begin{cases} 0 \text{ für } \nu \neq \mu, \\ 1 \text{ für } \nu = \mu, \end{cases}$$

während die Erfüllung der Orthogonalitätsbedingungen für die Spaltenvektoren

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})}\, r_{\nu m}^{(\mathrm{IIa})} = \begin{cases} 0 \text{ für } n \neq m, \\ 1 \text{ für } n = m, \end{cases} \tag{58}$$

noch bewiesen werden muß.

Die Darstellung der Polynome $y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})}$ durch die Formel von Rodrigues (17) kann einfach in eine Form gebracht werden, bei der die Polynome durch die $n$-te Differenz in $\nu$ dargestellt sind. Schreibt man unter das Differenzenzeichen die Größe, bezüglich der die Differenz gebildet werden soll, so gilt

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} = \frac{a^n\, n!}{\nu!}\, \underset{(n)}{\Delta^n} \left[\frac{a^{-n}}{(n-\nu)!}\right] = a^n\, \underset{(\nu)}{\Delta^n} \left[\frac{a^{-\nu}}{(\nu-n)!}\right]. \tag{17'}$$

Außerdem kann man noch neben (18) die Polynome $y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})}$ in folgender Art angeben

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} = \frac{1}{a^\nu\, \nu!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\nu}{k} \frac{a^k\, n!}{(n-k)!}, \qquad \nu, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{18'}$$

Durch Anwendung der partiellen Summation auf (58), indem man $r_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})}$ durch die Formel von Rodrigues (17′) ersetzt, läßt sich die Orthogonalität leicht zeigen[16]. Wir beschränken uns auf den Beweis der Normiertheit; man findet mit Hilfe von (17′) und der partiellen Summation

---

[15] Eine ausführliche Theorie dieser unendlichen orthogonalen Matrizen findet man in der Arbeit [3] des Verfassers.

[16] Alle aus der partiellen Summation entstehenden Glieder, wie auch die Summe, verschwinden; man vgl. mit Anm. 9 oder mit [3], Seite 81.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})^2} = \frac{1}{e^{1/a}\, n!} \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu!\, a^{\nu}\, y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} \underset{(\nu)}{\Delta^n} \left[\frac{a^{-\nu}}{(\nu-n)!}\right] =$$

$$= \frac{(-1)^n}{e^{1/a}\, n!} \sum_{\nu=0}^{\infty} \underset{(\nu)}{\Delta^n} [\nu!\, a^{\nu}\, y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})}] \cdot \frac{a^{-\nu-n}}{\nu!}.$$

Berechnet man noch die darin stehende $n$-te Differenz aus der Darstellung (18′), so erhält man schließlich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})^2} = \frac{(-1)^n}{e^{1/a}\, n!} (-1)^n\, n!\, a^n\, a^{-n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^{-\nu}}{\nu!} = 1.$$

Die normierten Polynome (IIa) sind also Elemente einer unendlichen orthogonalen Matrix, deren Zeilen- und Spaltenvektoren ein abgeschlossenes und vollständiges System bilden.

2. Die Literatur über orthogonale Polynomsysteme ist bereits so umfangreich geworden, daß hier nur in lückenhafter Form die Spezialfälle der drei Polynomsysteme I, II und IIa angegeben werden können. Zunächst sei eine Arbeit von *W. Hahn* [7] genannt: „Über Orthogonalpolynome, die $q$ Differenzengleichungen genügen", die in gewissem Sinne dieser Arbeit übergeordnet ist, da in ihr eine systematische Theorie aller dieser Polynome (klassische und übersetzte) von einem ganz allgemeinen Gesichtspunkt aus erfolgt.

Die *Tschebyschew'schen Interpolationspolynome*, die man mit ausführlicher Literaturangabe in [8] findet, sind als Sonderfall ($\alpha = \beta = 0$, $A = 0$, $B = N$ (ganz)) in (11) bzw. (12) enthalten. Häufig verwendet man, wie zum Beispiel in [9], diese Interpolationspolynome im symmetrischen Grundintervall, das heißt man setzt $A = -\frac{N}{2}$ und $B = \frac{N}{2}$.

Die verallgemeinerten Tschebyschew'schen Interpolationspolynome lassen sich nicht wie die entsprechenden Jakobischen Polynome durch hypergeometrische Funktionen, sondern nur durch verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen ausdrücken. Aus (20) und (21) findet man durch Anwendung der für die Gammafunktion bestehenden Identität

$$\Gamma(z-p) = (-1)^p \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)}{\Gamma(p+1-z)}, \quad p \text{ ganz} \tag{59}$$

die Darstellung

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{I})} = \frac{(n-A+\beta+1;\,1;\,\nu)\,(n-B;\,1;\,\nu)}{(\alpha+1;\,1;\,\nu)\,(\beta+1;\,1;\,\nu)}\, {}_3F_2(-\nu,\, -n+A,\, B-n+\alpha+1;$$

$$-n+A-\nu-\beta,\, B-n-\nu+1;\,1), \tag{60}$$

Bedingungen wie nach (12).

Die *Elemente der Laguerreschen Matrizen*, ausführlich in [3] dargestellt, lassen sich mit der Transformation (59) durch hypergeometrische Funktionen

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{II})} = \frac{(n-A+\alpha+1;1;\nu)}{e^{\nu}\,(\alpha+1;1;\nu)}\,{}_2F_1(-\nu, -n+A; -n+A-\nu-\alpha; e), \quad (61)$$

Bedingungen wie nach (15)

ausdrücken.

Die Polynome von *Krawtchouk*, von Szegö [10] in der Form

$$p_{\nu n} = [\binom{N}{\nu}]^{-1/2} (q/p)^{\nu/2} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{N-n}{k} \binom{n}{\nu-k} (p/q)^k, \quad \nu, n = 0, 1, \ldots, N \quad (62)$$

$$p>0,\ q>0,\ p+q=1$$

angegeben, lassen sich *nicht* durch die übersetzten Polynomsysteme ausdrücken. Sie sind im endlichen Intervall definiert ($n = 0, 1, \ldots, N$), genügen aber keiner Rodrigues-Formel der Art (20). Die in den Polynomen (62) auftretende Konstante $p/q$ müßte nämlich durch eine entsprechende, in der $\nu$-ten Differenz von (20) enthaltenen Konstante $C^n$ ausgedrückt werden; diese kann aber in der $\nu$-ten Differenz von (20) nicht vorkommen, da sonst aus (20) kein Polynom $\nu$-ten Grades in $n$ entstehen würde. Für $p = q = \frac{1}{2}$ läßt sich, abgesehen von einer Diskrepanz im Vorzeichen, durch die Wahl von $\alpha = -\nu - 1$ eine formale Übereinstimmung erreichen, die ihrerseits wieder der ursprünglichen Voraussetzung über $\alpha$ widerspricht.

Eine Übereinstimmung der Polynome von Krawtchouk mit den Polynomen II in (15) läßt sich durch die Wahl $\frac{p}{q} = -e$ und $\alpha = -N-1$ erreichen. Statt $e$ kann man zwar nach Anmerkung 5 $e^{\beta}$ ($\beta \geqq 0$) setzen und dadurch die $e$-Potenz der Konstanten $p/q$ anpassen, aber ein wegen der Verschiedenheit der Intervallsgrenzen notwendiger Widerspruch liegt einerseits in der negativ ganzen Wahl von $\alpha$, andererseits im negativen Vorzeichen des Quotienten $p/q$.

3. Die Polynome von *Charlier* findet man bei Szegö [10] in der Form

$$p_{\nu n} = \frac{(-1)^{\nu} n!}{d^{n+\frac{\nu}{2}} \sqrt{\nu!}}\, \Delta^{\nu} \left[\frac{d^n}{(n-\nu)!}\right], \quad (63)$$

die mit den von uns definierten Polynomen (17) bis auf einen von $\nu$

abhängigen Faktor übereinstimmen, wenn man $A=0$ und $d=1/a$ setzt; das heißt, es gilt

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} = \frac{(-1)^{\nu}}{\sqrt{\nu!}\, a^{\frac{\nu}{2}}} p_{\nu n}, \qquad \nu, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Im § 1, 2 werden die orthogonalen Polynome von der Rodrigues-Formel ausgehend konstruiert. Für den Fall, daß das Polynom $X_n$ aus (19) in $n$ den Grad null hat, ergeben sich die Polynome

$$y_{\nu m}^{(\mathrm{III})} = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{\nu-k} \binom{m-A+k}{k} \frac{b^k}{(\nu-k)!}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{26'}$$

die durch eine einfache Transformation mit den in (18) angegebenen Charlierschen Polynomen

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{n-A}{k} \frac{a^{k-\nu}}{(\nu-k)!}, \quad \begin{matrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ n = A, A+1, \ldots \end{matrix} \tag{18}$$

zusammenhängen. Setzt man nämlich

$$m = -n-1+2A, \; b = -a, \tag{64}$$

dann besteht zwischen den Polynomen IIa und III die Beziehung

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} = b^{-\nu} y_{\nu m}^{(\mathrm{III})};$$

das heißt für $n = A, A+1, \ldots, \infty$ durchläuft der Index $m$ der Polynome III die Werte $A-1, A-2, \ldots, -\infty$. Die Polynome $y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})}$ sind im Intervall $A$ bis $\infty$ orthogonal, während die Polynome $y_{\nu m}^{(\mathrm{III})}$ den Orthogonalitätsbereich $A-1$ bis $-\infty$ haben; daher ergeben beide Polynomsysteme zusammen in gewissem Sinne ein Äquivalent zu den Hermiteschen Polynomen.

Aus (26) läßt sich mit Hilfe der Beziehung (59) das Polynomsystem III durch die konfluenten hypergeometrischen Funktionen[17] ausdrücken

$$y_{\nu m}^{(\mathrm{III})} = \frac{b}{\nu!} (m-A+1; 1; \nu)\, {}_1F_1(-\nu; -m+A-\nu; -\frac{1}{b}),$$

woraus durch Anwendung der Transformation (64)

$$y_{\nu n}^{(\mathrm{IIa})} = \frac{(-n+A; 1; \nu)}{\nu!}\, {}_1F_1(-\nu; n-A-\nu+1; \frac{1}{a}) \tag{65}$$

für $\nu \leqq n-A$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n = A, A+1, \ldots$

entsteht.

[17] Für diese stehen als Bezeichnung sowohl $\Phi$ als auch ${}_1F_1$ in Verwendung.

## Literatur

[1] The American Mathematical Monthly, **59**/3, 163—168, 1952.

[2] *W. Gröbner*: Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen. Monatshefte für Mathematik **52**, 38—54, 1948.

[3] *P. Lesky*: Unendliche orthogonale und Laguerresche Matrizen. Monatshefte für Mathematik **63**, 59—83, 1958.

[4] *P. Lesky* und *A. Kaiser*: Über die Interpolationspolynome von Tschebyschew. Monatshefte für Mathematik **63**, 277—286, 1959.

[5] *F. G. Tricomi*: Vorlesungen über Orthogonalreihen. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.

[6] *P. Lesky*: Über die Lösung linearer homogener Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe hypergeometrischer Funktionen. Monatshefte für Mathematik, **64**, 270—288, 1960.

[7] Mathematische Nachrichten **2**, 4—34, 1949.

[8] Encycl. d. scienc. mathemat. **1**/4.

[9] *R. L. Anderson* and *T. A. Bancroft*: Statistical Theory in Research. New York, Toronto, London, Mc. Graw-Hill Book Company, Inc. 1952.

[10] *G. Szegö*: Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society, Colloquium Publications, **33**, 32—36, 1939.

# Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmäßigen Kettenbrüche

Von

**Gustav Lochs**, Innsbruck

*(Eingegangen am 6. April 1960)*

## 1. Fragestellung und Ergebnisse

Bei der Entwicklung einiger Brüche in regelmäßige Kettenbrüche fiel mir die Häufigkeit des Teilnenners 1 auf. Das brachte mich auf den Gedanken, die Häufigkeit eines bestimmten Teilnenners $b$ in den zu den echten Brüchen gehörigen regelmäßigen Kettenbrüchen zu untersuchen.[1,2] Ein echter Bruch hat zwei Entwicklungen, eine, sie heiße erster Art, bei der der letzte Teilnenner größer als 1 ist, und eine „zweiter Art" mit 1 als letztem Teilnenner. Es seien $N$ und $b$ natürliche Zahlen. Wir denken uns die Entwicklungen erster Art für alle Brüche $z/n$ hingeschrieben, für die $1 \leqslant z < n \leqslant N$ ist, wobei $z$ und $n$ natürliche, aber nicht notwendig teilerfremde Zahlen sind. Die Anzahl der Teilnenner, die gleich $b$ sind, nennen wir $h(N, b)$, die Anzahl aller Teilnenner $h(N)$.

Ist etwa $N = 4$, so handelt es sich um die Entwicklungen: $^1/_2 = [0,2]$, $^1/_3 = [0,3]$, $^2/_3 = [0,1, 2]$, $^1/_4 = [0,4]$, $^2/_4 = [0,2]$, $^3/_4 = [0,1, 3]$, und es ist $h(4,1) = 2$, $h(4,2) = 3$, $h(4,3) = 2$, $h(4,4) = 1$ und $h(4) = 8$.

Nehmen wir nicht nur die Entwicklungen erster Art, sondern auch die zweiter Art, so erweist es sich als bequem, auch die Entwicklungen $[0,1]$ der unechten Brüche $n/n$ hinzuzunehmen. Die entsprechenden Anzahlen mögen jetzt $H(N, b)$ und $H(N)$ heißen.

Ist wieder $N = 4$, so kommen zu den obigen Entwicklungen also noch folgende hinzu: $^1/_1 = [0,1]$, $^1/_2 = [0,1,1]$, $^2/_2 = [0,1]$, $^1/_3 = [0,2,1]$, $^2/_3 = [0,1, 1,1]$,

---

[1] Über die Nummern 2 bis 6 dieser Arbeit und den entsprechenden Teil der Einleitung habe ich am 3. Österreichischen Mathematikerkongreß in Salzburg, 1952, vorgetragen (Nachrichten d. Öst. Math. Ges. Nr. 21/22, S. 37). Über den größten Teil dieser Arbeit habe ich auch 1958 an der University of Oregon, Eugene, und 1959 an der Universität Münster in W. vorgetragen.

[2] Statt „Entwicklung in einen regelmäßigen Kettenbruch" will ich von nun an nur mehr „Entwicklung" sagen und statt „regelmäßiger Kettenbruch" nur mehr „Kettenbruch".

$^3/_3 = [0,1]$, $^1/_4 = [0,3,1]$, $^2/_4 = [0,1,1]$, $^3/_4 = [0,1,2,1]$ und $^4/_4 = [0,1]$ und es ist $H(4,1) = 17$, $H(4,2) = 5$, $H(4,3) = 3$, $H(4,4) = 1$ und $H(4) = 26$.

Schließlich heiße die Anzahl der *letzten* Teilnenner der Entwicklungen erster und zweiter Art, die gleich $b$ sind, $L(N, b)$. Es ist also etwa $L(4,1) = 10$, $L(4,2) = 3$.

Im folgenden (Nr. 2—8) werden asymptotische Entwicklungen für $H(N, b)$, $h(N, b)$, $h(N)$ und $L(N, b)$ abgeleitet, für $L(N, b)$ sogar eine exakte Formel. Die Formeln für $H(N, b)$ sind in (6,2) bis (6,5) gegeben, die für $L(N, b)$ in (7,7). Bevor ich die Ausdrücke für $h(N, b)$ und $h(N)$ angebe, möchte ich noch erwähnen, daß man auch nach entsprechenden Anzahlen für den Fall fragen könnte, daß man nicht alle, sondern nur die reduzierten Brüche entwickelt. Die asymptotischen Darstellungen dieser Anzahlen könnten nach der Methode von Nr. 6 sofort aus den hier gegebenen hergeleitet werden.

In den nun folgenden Formeln bedeutet $\Delta f(b) = f(b+1) - f(b)$ und $\Delta^2 f(b) = f(b+2) - 2f(b+1) + f(b)$. $\delta_{b1}$ ist das Kroneckersymbol, also 1 für $b = 1$, sonst 0. $C$ ist die Eulersche Konstante. Die hier auftretende, ihrer Größe mach nicht besonders ins Gewicht fallende Funktion $k(b)$, die mit zunehmendem $b$ rasch abnimmt, wird in Nr. 5 durch eine Potenzreihe dargestellt. In Nr. 10 wird gezeigt, daß sie auf der Strecke $[-1,0]$ singulär ist und von keiner Seite her über diese Strecke hinaus analytisch fortgesetzt werden kann, während sie sonst überall auf der Zahlenkugel regulär ist[3].

Es ist

$$h(N, b) = \frac{1}{\zeta(2)} N^2 \log N \log \frac{(b+1)^2}{b(b+2)} + \frac{1}{2\,\zeta(2)} N^2 \left\{ \Delta^2 \left[ \log b \left( \log b + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + 3 - 4\,C + \frac{2\,\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + \frac{\zeta(2)}{b} + \frac{\zeta(3)}{3\,b^2} \right] + \Delta\, k(b) \right\} - \frac{N^2}{2} \delta_{b1} + \text{Rest} =$$

$$= c(b)\, N^2 \log N + d(b)\, N^2 + \text{Rest} \qquad (1,1)$$

---

[3] $k(b)$ entsteht durch Summation von Ausdrücken $1/x(bx + y)$ über Paare ganzer Zahlen $x$ und $y$. Das erinnert an Eisensteinreihen und ich habe daher versucht, einen Zusammenhang zwischen $k(b)$ und Modulfunktionen zu finden, aber ohne Erfolg. *H. Petersson* hat sich aber für die Frage interessiert und für die Funktion $K(b)$, die im Wesentlichen mit $k(b)$ übereinstimmt (siehe Nr. 10) die Beziehung

$$K(b) + K(-1/b) - K(-b) - K(1/b) = \frac{2\,\pi\,i}{6} \log \Delta(b) + 4[\text{dil}(b) - \text{dil}(-b)]$$

gefunden, in der dil den Dilogarithmus und $\Delta$ die allgemein so bezeichnete Modulform bedeuten. Er wird darüber in einer eigenen Arbeit berichten.

Dabei ist

$$|\,\text{Rest}\,| \leqslant \text{const.}\,(N^{3/2}\,b^{-3/2} + N \log N), \tag{1,2}$$

aber auch

$$|\,\text{Rest}\,| \leqslant \text{const.}\,(N^2\,b^{-3} \log N + N^{4/3}\,b^{-4/3}). \tag{1,3}$$

Für die Konstanten in diesen Abschätzungen genügt es, wie ich ohne Beweis angebe, 1000 zu setzen, mit etwas Mühe könnte man aber bessere Schranken für sie finden. Mit $c(b)$ bzw. $d(b)$ sollen die Koeffizienten von $N^2 \log N$ bzw. $N^2$ in (1,1) bezeichnet werden.

Hat $b^3$ die Größenordnung von $N$, so sind (1,2) und (1,3) etwa gleich gut, für größere Werte von $b$ ist (1,3), für kleinere (1,2) günstiger.

Für $b$, die die Größenordnung von $N$ haben, empfiehlt sich die in Nr. 9 gegebene Berechnungsmethode oder die dort aufgestellte Tabelle.

Ist $b$ nicht allzuklein, so ist auch die Formel

$$h(N, b) = \frac{1}{2\,\zeta(2)} \left(\frac{N}{b+1}\right)^2 \left(2 \log \frac{N}{b+1} + 4\,C - 1 - 2\,\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + \text{Rest} \tag{1,4}$$

mit dem Rest (1,3) brauchbar. Ist $b^3$ von der Größenordnung $N$ oder größer, so ist (1,4) ebenso gut wie (1,1).

Für $h(N)$ erhält man durch Summation von (1,1) über $b = 1$ bis $\infty$

$$h(N) = \frac{\log 2}{\zeta(2)}\,N^2 \log N - \frac{N^2}{2} +$$

$$+ \frac{N^2}{2\,\zeta(2)} \left\{ - \log 2 \left(\log 2 + 3 - 4\,C + 2\,\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + \frac{\zeta(2)}{2} + \frac{\zeta(3)}{4} - k(1) \right\} + \text{Rest}$$

$$= c(0)\,N^2 \log N + d(0)\,N^2 + \text{Rest} \tag{1,5}$$

also

$$h(N) = 0{,}42138\,N^2 \log N - 0{,}21807\,N^2 + \text{Rest} \tag{1,6}$$

mit

$$|\,\text{Rest}\,| \leqslant \text{const.}\,N^{3/2}. \tag{1,7}$$

Auch für die Konstante in (1,7) könnte ein Wert angegeben werden. Die Zahlen in (1,6) sind gerundet.

Wenn $N$ einigermaßen groß ist, überwiegen wegen des Faktors $\log N$ die ersten Glieder in (1,1) und (1,5). *Die relativen Häufigkeiten der verschiedenen Teilnenner konvergieren mit wachsendem N gegen feste Zahlen*, die im folgenden zusammengestellt seien:

| Teilnehmer: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\geqslant 11$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Prozent: | 41,5 | 17,0 | 9,3 | 5,9 | 4,1 | 3,0 | 2,3 | 1,8 | 1,5 | 1,2 | 12,6 |

*Diese prozentualen Anteile sind übrigens die gleichen, wenn man nicht nur die Entwicklungen erster, sondern die erster und zweiter Art berücksichtigt. Sie ändern sich auch nicht, wenn man statt aller Brüche $z/n$ nur die reduzierten Brüche entwickelt.* Denn zu den ersten Gliedern in (1,1) und (1,5) tritt dann nur der Faktor $1/\zeta(2)$ hinzu.

Für $b = 1$ bis 10 ergeben sich folgende Werte für die Koeffizienten $c(b)$ und $d(b)$ von $N^2 \log N$ und $N^2$ in Formel (1,1) sowie für $k(b)$:

| $b$ | $c(b)$ | $d(b)$ | $k(b)$ | $b$ | $c(b)$ | $d(b)$ | $k(b)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,17489 | −0,15159 | 0,02364 | 6 | 0,01253 | −0,00565 | 0,00001 |
| 2 | 0,07160 | +0,06481 | 0,00155 | 7 | 0,00958 | −0,00596 | 0,00001 |
| 3 | 0,03923 | +0,01449 | 0,00028 | 8 | 0,00755 | −0,00581 | — |
| 4 | 0,02482 | +0,00044 | 0,00008 | 9 | 0,00611 | −0,00548 | — |
| 5 | 0,01713 | −0,00417 | 0,00003 | 10 | 0,00505 | −0,00509 | — |

In Nr. 11 wird die Methode angegeben, mit der ich einige $h(N, b)$ wirklich gezählt habe. Ihr Vergleich mit dem nach (1,1) berechneten Näherungswert $c(b)\, N^2 \log N + d(b)\, N^2$ ergab, daß letzterer durchwegs zu klein war. In der nun folgenden Zusammenstellung steht neben der wirklichen Zahl $h(N, b)$ in Klammer, um wieviel der auf Ganze gerundete Näherungswert zu klein ist. Würde man den Näherungswert noch um seinen $N$-ten Teil vermehren, so käme man der wirklichen Zahl noch viel näher und die Unterschiede hätten auch nicht alle dasselbe Vorzeichen.

$h(27,1) = 321(12)$, $h(28,1) = 350(12)$, $h(29,1) = 389(21)$, $h(30,1) = 413(14)$, $h(31,1) = 449(18)$, $h(32,1) = 483(18)$, $h(33,1) = 520(19)$, $h(42,1) = 905(19)$, $h(43,1) = 965(29)$, $h(50,1) = 1331(35)$, $h(60,1) = 2062(30)$, $h(97,1) = 6176(41)$, $h(98,1) = 6330(85)$, $h(99,1) = 6465(74)$, $h(100,1) = 6598(60)$.

$h(60,2) = 1309(21)$, $h(95,2) = 3560(34)$, $h(96,2) = 3636(27)$, $h(97,2) = 3737(45)$, $h(98,2) = 3814(39)$, $h(99,2) = 3894(34)$, $h(100,2) = 3975(29)$.

$h(58,3) = 596(12)$, $h(59,3) = 622(15)$, $h(60,3) = 641(11)$, $h(100,3) = 1964(14)$.

$h(60,4) = 367(9)$.

Diese Ergebnisse legen es also nahe, als Näherungen für $h(N)$ und $h(N, b)$ die auf nächste Ganze gerundeten Werte

$$N(N+1)[c(0)\log N + d(0)] \tag{1,8}$$

$$N(N+1)[c(b)\log N + d(b)] \tag{1,9}$$

zu verwenden. Diese gerundeten Näherungswerte sollen $h^*(N)$ und $h^*(N, b)$ heißen.

Als ich später Gelegenheit hatte, die elektronische Rechenmaschine Alwac-E-III am Mathematical Department des Oregon State College, Corvallis, Oregon, USA, zu benutzen, berechnete ich daher damit für $b=1, 2, \ldots 10$ und $N=2, \ldots 433$ die Fehler $F(N, b)=h(N, b)-h^*(N, b)$ und $F(N) = h(N) - h^*(N)$. Bei der näheren Untersuchung dieser Fehlerreihen leistete mir das Mathematische Labor an der Technischen Hochschule Wien sehr wertvolle Rechenhilfe. Über die Ergebnisse dieser Berechnungen berichtet Nr. 12. Es sei mir aber hier gestattet, den Vorständen der beiden Institute bestens zu danken, Herrn Prof. *A. T. Lonseth* für die Erlaubnis, die Alwac zu benutzen und Herrn Prof. *R. Inzinger* für die kostenlose Durchführung umfangreicher Rechnungen durch das Mathematische Labor.

## 2. Zurückführung von H(N, b) auf die Lösungszahl eines Ungleichungssystems

Satz: *Rechnen wir jede ganzzahlige Lösung* $(x, y, u, v)$ *des Systems*

$$bxu + xv + yu \leqslant N \tag{2,1}$$

$$1 \leqslant x \tag{2,2}$$

$$0 \leqslant y \leqslant x \tag{2,3}$$

$$1 \leqslant u \tag{2,4}$$

$$0 \leqslant v \leqslant u \tag{2,5}$$

$$(u, v) = 1 \tag{2,6}$$

*mit der Vielfachheit* $2^{2-p-q}$, *wo* $p$ *und* $q$ *die Anzahlen der (für die Lösung) in* (2,3) *bzw.* (2,5) *gültigen Gleichheitszeichen sind, so ist* $H(N, b)$ *gleich der Lösungszahl dieses Systems.*

Beweis. Ich verwende die Bezeichnungen nach *Perron* [1,2] und schreibe demgemäß $x_0$ statt $z$ und $x_1$ statt $n$. Es sei also $1 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant N$ und in einer Entwicklung von $x_0/x_1$ habe der $r$-te Teilnenner $b_r$ den Wert $b$. Ich führe die Entwicklung nur bis zum Auftreten von $b_r$

$$\frac{x_0}{x_1} = [0, b_1, \ldots b_{r-1}, \xi_r] \text{ mit } \xi_r = b + \frac{x_{r+2}}{x_{r+1}}.$$

Die beiden letzten, ohne $b_r$ gebildeten Näherungsbrüche sind $A_{r-2}/B_{r-2}$ und $A_{r-1}/B_{r-1}$. Es ist

$$x_0 = x_{r+1}[A_{r-1}\,\xi_r + A_{r-2}] \text{ und } x_1 = x_{r+1}[B_{r-1}\,\xi_r + B_{r-2}];$$

daß nämlich $x_0$ und $x_1$ sich wie die beiden rechts stehenden Ausdrücke verhalten, lehrt die Kettenbruchtheorie. Der Faktor $x_{r+1}$ ergibt sich so. Wir setzen $x_{r+1} = dt$, wo $d = (x_0, x_1) = (x_{r+1}, x_{r+2})$ sei. Erst durch Multiplikation mit $t$ entstehen aus den eckigen Klammern ganze Zahlen und erst durch Multiplikation mit $dt$ solche mit dem g. g. Teiler $d$.

Aus der Formel für $x_1$ ergibt sich wegen $x_1 \leqslant N$

$$bB_{r-1}\,x_{r+1} + B_{r-1}\,x_{r+2} + B_{r-2}\,x_{r+1} \leqslant N.$$

Setzen wir

$$B_{r-1} = u,\ B_{r-2} = v,\ x_{r+1} = x,\ x_{r+2} = y, \tag{2,7}$$

so ergibt sich (2,1). (2,2) und (2,3) folgen daraus, daß $x_{r+1}$ und $x_{r+2}$ Divisor und Rest bei der zu $b_r$ führenden Division $x_r = b_r\,x_{r+1} + x_{r+2}$ sind. (2,4), (2,5) und (2,6) drücken bekannte Eigenschaften der Näherungsnenner aus.

Durch (2,7) wird also wirklich jedem in $H(N, b)$ gezählten Teilnenner eine eindeutig bestimmte Lösung des Systems (2,1) — (2,6) zugeordnet. Um zu zeigen, daß auch umgekehrt jede Lösung des Systems sich so ergibt, und zwar aus $2^{2-p-q}$ verschiedenen Teilnennern, überlegen wir, daß so ein Teilnenner eindeutig durch folgende Angaben charakterisiert werden kann: Zähler $x_0$ und Nenner $x_1$ des Bruches, in dessen Entwicklung er vorkommt, seine Nummer $r$ in dieser Entwicklung und Art der Entwicklung.

Ist $0 < y < x$, so läßt $y/x = x_{r+2}/x_{r+1}$ je eine Entwicklung erster und zweiter Art zu. Ist aber $y = 0$, so ist der fragliche Teilnenner $b_r$ der letzte, die Art der Entwicklung ist also eindeutig bestimmt. Ist $y = x$, so ist $b_r$ der vorletzte Teilnenner und der letzte ist 1, die Entwicklung also erster Art.

Ist $0 < v < u$, so gibt es zwei verschiedene Folgen von Teilnennern $b_1 \ldots b_{s-1}$, die zu $B_{r-2} = v$ und $B_{r-1} = u$ führen. Man erhält sie, indem man die Teilnenner der beiden Entwicklungen von $v/u$ in umgekehrter Reihenfolge anschreibt (inverser Kettenbruch). $r$ nimmt dabei verschiedene Werte an. Ist aber $0 < v < u$ nicht erfüllt, so ist der Kettenbruch $0, b_1, \ldots b_{r-1}$ eindeutig bestimmt, nämlich [0] im Falle $v = 0$ und [0,1] im Falle $v = u$. Zu einer Lösung $(x, y, u, v)$ gibt es also gerade $2^{1-p}\,2^{1-q}$ verschiedene Exemplare eines Teilnenners $b$.

### 3. Erste Formel für die Lösungszahl des Systems (2,1) — (2,5)

In den Nummern 3—5 bedeute $N$ eine beliebige positive Zahl.

Um $H(N, b)$ zu finden, suchen wir zunächst die mit denselben Vielfachheiten berechnete Lösungszahl des Systems (2,1) — (2,5), wobei wir also die Forderung $(u, v) = 1$ außer acht lassen. Diese Lösungszahl heiße $A(N, b)$. Es ist die vierfache Gitterpunktzahl in dem durch (2,1) bis (2,5) beschriebenen Teil eines $R_4$, wobei Randpunkte teilweise nicht voll gezählt werden. Eine erste Formel für $A(N, b)$ ergibt sich leicht so:

Halten wir zunächst $x$ und $u$ fest, so gibt es bei Beachtung der Vielfachheiten genau $4\,xu$ Wertpaare $(y, v)$, die mit (2,3) und (2,5) verträglich sind. Wenn $(b+2)\,xu \leqslant N$ ist, erfüllen sie auch alle die Bedingungen (2,1). Ist aber $bxu > N$, so erfüllt sie keines mehr. Also ist

$$4 \sum_{(b+2)\,xu \leq N} xu \leqslant A(N, b) \leqslant 4 \sum_{bxu \leq N} xu. \tag{3,1}$$

Nun ist mit $T = [\sqrt{L}]$, wenn wir mit eckigen Klammern immer die Funktion „größte ganze Zahl" bezeichnen,

$$\sum_{xu \leq L} xu = 2 \sum_{\substack{xu \leq L \\ x<u}} xu - \sum_{x^2 \leq L} x^2 = \sum_{x=1}^{T} \left( \left[ \frac{L}{x} + x \right] \left[ \frac{L}{x} - x + 1 \right] - x \right) =$$

$$= \sum_{x=1}^{T} \left\{ \frac{L^2}{x} - x^3 + L(1 - 2\tau_x) + x(\tau_x^2 - \tau_x) \right\}, \tag{3,2}$$

worin $L/x - [L/x] = \tau_x$ ist. Übernehmen wir aus der Theorie des Teilerproblems das Ergebnis $\Sigma(1 - 2\tau_x) = O(L^{1/3})$, so finden wir für die Summe (3,2),

$$\tfrac{1}{2} L^2 \log L + L^2(C - \tfrac{1}{4}) + O(L^{4/3}). \tag{3,3}$$

Setzt man in (3,3) einmal $L = N/(b+2)$ und einmal $L = N/b$, so ergibt (3,1)

$$A(N, b) = S_1 + T_1 \tag{3,4}$$

mit

$$S_1 = \left( \frac{N}{b+1} \right)^2 \left( 2 \log \frac{N}{b+1} + 4C - 1 \right), \tag{3,5}$$

$$T_1 = \eta\, c_1 \frac{N^2}{b^3} \log \frac{N}{b} + \eta\, c_2 \left( \frac{N}{b} \right)^{4/3}. \tag{3,6}$$

$\eta$ bedeute hier wie immer im folgenden eine Zahl zwischen — 1 und 1.

$c_1, c_2, \ldots$ bedeuten Konstanten, für die man Schranken angeben könnte. Es ist $c_1 \leqslant 4$, wie ich ohne Beweis angebe.

Die Formel gilt für $b \leqslant N$ nach ihrer Herleitung, aber auch für $b > N$, weil dann einerseits $A(N, b) = 0$ ist, andererseits das zweite Restglied $S_1$ überwiegt. Dieses zweite Restglied beeinträchtigt die Genauigkeit der Formel auch sehr, wenn $N/b$ im Verhältnis zu $c_2$ nicht groß ist. Da diese Unsicherheit aus dem Teilerproblem stammt, bleibt zu ihrer Vermeidung nichts anderes übrig, als die Summe (3,2) exakt zu berechnen. Da ist es dann einfacher, die entsprechende Rechnung gleich für das volle System (2,1) bis (2,6) durchzuführen. Das soll für kleinere Werte von $N/b$ in Nr. 9 geschehen.

Das erste Restglied stört die Brauchbarkeit der Formel (3,4) gerade für die interessanten kleinen $b$. Wir leiten daher in den folgenden Nummern noch eine zweite Formel für $A(N, b)$ ab. Ihre Herleitung ist umständlich, weshalb ich alle Zwischenrechnungen auslassen werde.

## 4. Zweite Formel für A(N, b)

Die Ungleichungen (2,1) bis (2,5) sind in den Paaren $(x, y)$ und $(u, v)$ symmetrisch. Wir erhalten daher $A(N, b)$ auch, wenn wir zu diesen Ungleichungen noch

$$u \geqslant x \tag{4,1}$$

dazunehmen und dafür die Lösungen des so ergänzten Systems mit der Vielfachheit $2^{3-p-q-r}$ rechnen, wo $r$ gleich 0 oder 1 ist, je nachdem in (4,1) für die betreffende Lösung das Ungleichheits- oder das Gleichheitszeichen gilt. Wenn wir von nun an Gitterpunkte oder Lösungen zählen, so immer mit diesen Vielfachheiten.

Wir bestimmen jetzt die Zahl der Lösungen mit festen, (2,2) und (2,3) genügenden Zahlen $x$ und $y$. Wir unterscheiden zwei Fälle: a) $x(bx + x + y) \leqslant N$ und b) $x(bx + y) \leqslant N < x(bx + x + y)$. Ist $x(bx + y) > N$, so gibt es überhaupt keine Lösung.

Fall a). Auf einer Geraden $v = \text{const.}$ liegen, wie man aus einer Zeichnung sofort sieht,

$$2^{3-p}\left\{\left[\frac{N - vx}{bx + y}\right] - x + \tfrac{1}{2}\right\} = 2^{3-p}\left\{\frac{N - vx}{bx + y} - x - \Theta\left(\frac{N - vx}{bx + y}\right)\right\} \tag{4,2}$$

zu zählende Gitterpunkte, wenn $0 < v < x$ ist. Dabei ist die Funktion $\Theta$ definiert durch $\Theta(z) = z - [z] - \tfrac{1}{2}$. Ist $v = 0$, so sind nur halb soviel Gitterpunkte zu zählen wie (4,2) angibt, ist $v = x$, so um $2^{1-p}$

mehr, und wenn $x < v \leqq \dfrac{N}{bx + x + y}$ ist, um $2^{3-p}(v - x)$ weniger als nach (4,2). Über diese Gitterpunktzahlen ist nun die Summe von $v = 0$ bis $\left[\dfrac{N}{bx + x + y}\right]$ zu bilden. Für die Summe über die $\Theta$ habe ich in [5] folgende Abschätzung gegeben.

$B$ sei ein Näherungsnenner des Faktors von $v$ in $\Theta$. Man teile die $\Sigma\,\Theta$ in Abschnitte zu je $B$ Gliedern und einen Restabschnitt von höchstens $B$ Gliedern. Der Betrag jedes Abschnittes zu $B$ Gliedern übersteigt dann 1 nicht, der Betrag des Restabschnittes $B/2$ nicht. Nun ist $b$ ein Näherungsnenner von $x/(bx + y)$. Wir erhalten so

$$|\,\Sigma\,\Theta\left(\frac{N - v\,x}{bx + y}\right)| \leqq \frac{N}{b(bx+x+y)} + \frac{b}{2} < \frac{N}{b^2 x} + \frac{b}{2}. \tag{4,3}$$

Die Summation der übrigen Glieder macht keine Schwierigkeiten, wenn man

$$\left[\frac{N}{bx + x + y}\right] = \frac{N}{bx + x + y} - t$$

setzt. Die sich ergebenden Glieder mit $t$ sind $O(1)$. So erhält man schließlich im Falle a) als Anzahl der zu $x$, $y$ gehörigen Gitterpunkte

$$2^{2-p}\left(\frac{N^2}{(bx + y)\,(bx + x + y)} - x^2 + \eta\,c_3\,\frac{N}{b^2 x} + \eta\,c_4 b\right) \tag{4,4}$$

oder

$$2^{2-p}\,(H(x, y, b) - H(x, y, b + 1) + \eta\,c_3\,N b^{-2}\,x^{-1} + \eta\,c_4\,b), \tag{4,5}$$

wenn man setzt

$$H(x, y, b) = \frac{N^2}{x(bx+y)} - 2\,N + x(bx + y). \tag{4,6}$$

Fall b). Wir behandeln ihn genau so. Bei der Bildung der Summe $\Sigma\Theta$ brauchen wir nur zu überlegen, daß, wie man am bequemsten aus einer Zeichnung ersieht, diese Summe jetzt weniger Glieder hat als im Fall a). Die Abschätzung (4,3) bleibt also gültig und wir erhalten die Gitterpunktzahl im Falle b)

$$2^{2-p}(H(x, y, b) + \eta\,c_3\,N b^{-2}\,x^{-1} + \eta\,c_4\,b). \tag{4,7}$$

$A(N, b)$ ergibt sich nun, wenn der Ausdruck (4,5) über alle $x$, $y$, für die

$$0 \leqslant y \leqslant x, \quad x(bx + x + y) \leqslant N, \quad 1 \leqslant x \tag{4,8}$$

ist, summiert wird und dazu die über die Werte $x$, $y$, für die

$$0 \leqslant y \leqslant x, \quad x(bx + y) \leqslant N < x(bx + x + y), \quad 1 \leqslant x \tag{4,9}$$

ist, erstreckte Summe des Ausdrucks (4,7) addiert wird. Die beiden Summationsbereiche sind punktfremd und ihre Vereinigung ist durch

$$0 \leqslant y \leqslant x, \quad x(bx + y) \leqslant N, \quad 1 \leqslant x \tag{4,10}$$

gegeben. Dieser Bereich heiße $G$. Bilden wir nun

$$\sum_{(x,\,y)\,\varepsilon\,G} 2^{2-p} H(x, y, b) = G(b) \tag{4,11}$$

und

$$R(b) = \sum_{(x,\,y)\,\varepsilon\,G} 2^{2-p}(c_3 N b^{-2} x^{-1} + c_4 b)$$

so ist

$$A(N, b) = -\Delta G(b) + \eta R(b). \tag{4,12}$$

Für $R(b)$ ergibt sich sofort

$$R(b) \leqslant \sum_{bx^2 \leq N} \sum_{y=0}^{x} 2^{2-p}(c_3 N b^{-2} x^{-1} + c_4 b) =$$
$$= \sum_{bx^2 \leq N} 4(c_3 N b^{-2} + c_4 bx) = c_5 N^{3/2} b^{-1/2} + c_6 N. \tag{4,13}$$

## 5. Berechnung von A(N, b). Fortsetzung

Zur Berechnung von $G(b)$ setzen wir zunächst

$$Q = \left[\sqrt{\frac{N}{b+1}}\right] + 1 \text{ und } R = \left[\sqrt{\frac{N}{b}}\right] + 1 \tag{5,1}$$

und zerlegen den Bereich $G$ in zwei $G_1$ und $G_2$, und auch $G(b)$ dementsprechend in zwei Teile $G_1(b)$ und $G_2(b)$:

$G_1$ ist der Teil von $G$, in dem $1 \leqslant x \leqslant Q - 1$ ist. Zu ihm gehören bei festem $x$ alle Werte $y$ von 0 bis $x$. $G_2$ ist der Teil von $G$, in dem $Q \leqslant x \leqslant R - 1$ ist. Bei festem $x$ ist nur von $y = 0$ bis $y = [N/x] - bx$ zu summieren.

Wir berechnen zunächst $G_1(b)$. Würden wir ohne weitere Vorbereitungen mittels der Eulerschen Summenformel zuerst über $y$ und dann über $x$ summieren, so würden sich immer Restglieder der Größenordnung $N^2/b^2$ ergeben. Der folgende Weg ergibt ein günstigeres Restglied. Wir entwickeln $H(x, y, b)$ nach Potenzen von $B = 2b + 1$:

$$2^{2-p} H(x, y, b) =$$

$$= -2^{3-p} N + 2^{1-p} Bx^2 + 2^{1-p}(2y - x)x + 2^{3-p} N^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2y - x)^m}{B^{m+1} x^{m+2}}. \tag{5,2}$$

Die Reihe konvergiert für alle erforderlichen Werte von $b$, $x$ und $y$. Die Summation von $(2y - x)^m$ über $y$ ergibt 0 für ungerade $m$. Für gerades $m = 2n$ ist nach der Eulerschen Summenformel

$$\frac{1}{x^{2n+2}} \sum_{y=0}^{x} 2^{-p}(2y - x)^{2n} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{2n}{3x^3} + R_n(x) \tag{5,3}$$

wo

$$R_n(x) = c_{n2} x^{-5} + c_{n3} x^{-7} + \ldots + c_{nn} x^{-2n-1} \tag{5,4}$$

mit konstanten $c$ ist. Mit Benützung des Restg,iedes der Eulerschen Summenformel findet man

$$0 \geqslant R_n(x) > -2n(2n-1)(2n-2) x^{-5}. \tag{5,5}$$

Benützen wir noch

$$\Delta \log b = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) B^{2n+1}} \tag{5,6}$$

und die zweite Ableitung dieser Formel, so finden wir

$$G_1(b) = \sum_{x=1}^{Q-1} \left\{ -8Nx + 2Bx^3 + \frac{4N^2}{x} \Delta \log b - \frac{N^2}{3x^3} \Delta \frac{1}{b^2} + \right.$$
$$\left. + 8N^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(x)}{B^{2n+1}} \right\}. \tag{5,7}$$

Die Summation der ersten Glieder in der Klammer bis zu einem Restglied der Ordnung $O(b)$ bietet keine Schwierigkeiten. Zur Summierung des letzten Gliedes setzen wir

$$-\sum_{x=1}^{\infty} R_n(x) = -c_{n2} \zeta(5) - \ldots - c_{nn} \zeta(2n+1) = a_n. \tag{5,8}$$

Nach (5,5) ist $a_n = O(n^3)$, also konvergiert die Reihe

$$k(b) = 8 \sum_{n=0}^{\infty} a_n B^{-2n-1} \tag{5,9}$$

für $B > 1$, daher für $b > 0$.

Die $a_n$ ergeben sich bei etwas größeren Werten von $n$ bei Berechnung nach (5,8) als Differenz zweier sehr großer, auf viele Stellen übereinstimmender Zahlen. Indem man $\Sigma R_n(x)$ in die Summe von 1 bis $n$ und die Restsumme zerlegt und in der ersten Summe $R_n$ mittels (5,3) zu

$$0 > R_n(x) > \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(2n+1)\,x} - \frac{2n}{3\,x^3},$$

in der Restsumme mittels (5,5) abschätzt, findet man $|a_n| < n$. Durch Verfeinerung dieser Methode kann man $a_n$ für größere $n$ leichter berechnen als nach (5,8). Es ist $a_0 = a_1 = 0$, und abgerundet $2a_2 = -1{,}1060563$, $2a_3 = 2{,}4572169$, $2a_4 = 3{,}903796$, $2a_5 = 5{,}39894$, $2a_6 = 6{,}9225$, $2a_7 = 8{,}462$, $2a_8 = 10{,}02$, $2a_9 = 11{,}6$, $2a_{10} = 13$.

Es ist

$$N^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{x=Q}^{\infty} R_n(x)\Big) B^{-2n-1} = \eta \frac{2N^2}{Q^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{B^{2n+1}} =$$

$$= \eta\, c_7\, N^2 \frac{b^2}{N^2} \Delta \frac{1}{b^4} = \eta\, c_7,$$

wobei zuerst (5,5) und dann die vierte Ableitung der Formel (5,6) benützt wurde. Also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x=1}^{Q} 8\,N^2\,R_n(x) B^{-2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-8N^2\,a_n - \sum_{x=Q}^{\infty} 8\,N^2\,R_n(x)\Big)\,B^{-2n-1} =$$

$$= -N^2 k(b) + \eta\, c_8.$$

So ergibt schließlich

$$G_1(b) = N^2\big(4\,C\,\Delta \log b - {}^1\!/_3\,\zeta(3)\,\Delta\, b^{-2} - k(b)\big) + \frac{2N}{3} - 4N(Q^2 - Q + {}^1\!/_6) +$$

$$+ \frac{2b+1}{2}\,(Q^4 - 2Q^3 + Q^2) + 4N^2\Big(\log Q - \frac{1}{2Q} - \frac{1}{12\,Q^2}\Big)\,\Delta \log b +$$

$$+ \frac{N^2}{6}\Big(\frac{1}{Q^2} + \frac{1}{Q^3}\Big)\,\Delta\, b^{-2} + \eta\, c_9\, b. \qquad (5{,}10)$$

Zur Berechnung von $G_2(b)$ summieren wir zunächst nach $y$. Wir definieren $V$ und $\tau$ durch

$$V = \frac{N}{x} + \tau = \Big[\frac{N}{x}\Big] + 1.$$

Dann ist

$$G_2(b) = \sum_{x=Q}^{R-1} \sum_{y=0}^{[N/x]-bx} 2^{2-p}\,H(x, y, b) =$$

$$= \sum_{x=Q}^{R-1} \Big\{ \frac{4N^2}{x}\Big(\log V - \frac{1}{2\,V} - \frac{1}{12\,V^2} - \log bx + \frac{1}{12\,b^2\,x^2}\Big) +$$

$$+ \eta\, c_{10} \frac{N^2}{b^4\,x^5} + 2\,x(V^2 - V - b^2x^2) - 8N(V - bx - {}^1\!/_2)\Big\}.$$

Indem wir die von $V$ abhängigen Glieder mittels der Formeln

$$(1+u)^{-1}=1-u+O(u^2),\ (1+u)^{-2}=1-O(u),\ \log(1+u)=u-\tfrac{1}{2}u^2+O(u^3)$$

nach Potenzen von $\tau\,\dfrac{x}{N}$ entwickeln, erhalten wir

$$G_2(b)=\sum_{x=Q}^{R-1}\{f_1(x)+f_2(x)+\eta\,c_{11}\,x^2\,N^{-1}+\eta\,c_{12}\,N^2\,b^{-4}\,x^{-5}\}=$$

$$=\sum_{x=Q}^{R-1}\{f_1(x)+f_2(x)\}+\eta\,c_{13}\,N^{1/3}\,b^{-5/3}+\eta\,c_{14}. \tag{5,11}$$

mit

$$f_1(x)=4\,N^2\,x^{-1}\log(Nb^{-1}\,x^{-2})-6\,N^2\,x^{-1}+8\,Nbx-2\,b^2\,x^3. \tag{5,12}$$

$$3\,f_2(x)=N^2\,b^{-2}\,x^{-3}-x. \tag{5,13}$$

Mit

$$\int f_1(x)\,dx-\tfrac{1}{2}\,f_1(x)+{}^1/_{12}\,f_1'(x)=F_1(b,x)$$

gilt

$$\sum_{x=Q}^{R-1}f_1(x)=F_1(b,R)-F_1(b,Q)+\eta\,c_{15}(f_1'''(R)-f_1'''(Q).$$

Es ist

$$F_1(b,R)-F_1(b,Q)=F_1(b,R)-F_1(b+1,Q)+F_1(b+1,Q)-F_1(b,Q)=$$

$$=-\Delta F_1(b,R)+F_1(b+1,Q)-F_1(b,Q).$$

In $F_1(b,x)$, das wir zunächst berechnen müssen, setzen wir dann $x=R=$ $=\alpha+\sqrt{N/b}$ und entwickeln nach Potenzen von $\alpha$. So erhalten wir

$$F_1(b,R)=N^2\{(\log N)^2-2\log N\log b+(\log b)^2-3\log N+$$

$$+3\log b-{}^7/_2\}+\eta\,c_{16}\,b^2.$$

Ein Rest der Größenordnung $O(b^2)$ ist hier unvermeidlich. Entwickeln wir auch $f_1'''(R)$ auf diese Weise und ersetzen $f_1'''(Q)$ durch $f_1'''(\sqrt{N/b+1})$, wodurch wir den Rest nur vergrößern, so ergibt er sich zu $O(b^2)$. Damit finden wir

$$\sum_{x=Q}^{R-1}f_1(x)=\Delta\,N^2\{2\log N\log b-(\log b)^2-3\log b\}-$$

$$-4\,N^2\left(\log Q-\frac{1}{2\,Q}-\frac{1}{12\,Q^2}\right)\Delta\log b+4\,N(Q^2-Q+{}^1/_6)-$$

$$-\frac{2\,b+1}{2}(Q^4-2\,Q^3+Q^2)+\eta\,c_{17}\,b^2. \tag{5,14}$$

Auf dieselbe Weise finden wir

$$\sum_{x=Q}^{R-1} f_2(x) = -\frac{N}{3}\,\Delta\, b^{-1} - \frac{N^2}{6}\left(\frac{1}{Q^2}+\frac{1}{Q^3}\right)\Delta\, b^{-2} + \eta\, c_{18}. \tag{5,15}$$

Bilden wir nach (5,10), (5,11), (5,14) und (5,15) $G(b) = G_1(b) + G_2(b)$, so heben sich alle Glieder mit $Q$ weg. Schließlich ergibt (4,12)

$$A(N, b) = S_2 + \eta(c_5\, N^{3/2}\, b^{-3/2} + c_{19}\, b^2 + c_{20}\, N) \tag{5,16}$$

mit

$$S_2 = S_2(N, b) = N^2 \log N\,(-2\,\Delta^2 \log b) +$$

$$+ N^2\left\{\Delta^2\left((\log b + 3 - 4\,C)\,\log b + \frac{\zeta(3)}{3\,b^2}\right) + \Delta\, k(b)\right\} \tag{5,17}$$

Bei wirklicher Durchführung aller Abschätzungen habe ich für den Rest der Formel (5,16) gefunden

$$\eta\left(\frac{(3\,N\sqrt{N}}{2\,b(b+1)\sqrt{b}} + \frac{b+5}{4}\,\frac{N}{b} + (b+2)^2\right) \tag{5,18}$$

Es ist

$$-\Delta^2 \log b = \frac{1}{(b+1)^2} + O\left(\frac{1}{b^4}\right);$$

$$\Delta^2(\log b)^2 = -\frac{2\log(b+1)}{(b+1)^2} + \frac{2}{(b+1)^2} + O\left(\frac{\log b}{b^4}\right);$$

$$\Delta^2\, b^{-2} = O(b^{-4});\ \Delta\, k(b) = O(b^{-6}).$$

Zwischen $S_1$ aus (3,5) und $S_2$ aus (5,17) gilt also

$$S_2 = S_1 + \eta\, c_{21}\,\frac{N^2 \log Nb}{b^4} = S_1 + \eta\, c_{22}\,\frac{N^2}{b^3}\log N \tag{5,19}$$

Wir können also (3,4) auch so schreiben

$$A(N, b) = S_2 + \eta\left(c_{23}\,\frac{N^2}{b^3}\log N + c_2(N/b)^{4/3}\right). \tag{5,20}$$

## 6. Berechnung von H(N, b)

Wie aus [3] hervorgeht, ist ($\mu(n)$ bedeute die Möbiusfunktion)

$$H(N, b) = \sum_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{N}{n}, b\right)\mu(n) \tag{6,1}$$

Beim Beweis in [3] sind für die Nebenungleichungen zwar nur $<$-Zeichen und keine $\leqq$-Zeichen vorgesehen, wie sie in $0 \leqq v \leqq u$ auf-

treten. Auch ist dort von Vielfachheiten nicht die Rede. Aber da durch die Forderung $0 < u$ verhindert wird, daß $u$ und $v$ beide verschwinden, läßt sich der Beweis ohneweiters übertragen.

Ein Vergleich der Restglieder in (5,16) und (5,20) zeigt, daß beide von derselben Größenordnung sind, wenn $N$ die Größenordnung von $b^3$ hat. Für kleinere $N$ ist (5,20), für größere $N$ (5,16) vorzuziehen. Ist also $L$ eine natürliche Zahl der Größenordnung $Nb^{-3}$, so schreiben wir (6,1) so

$$H(N,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, S_2\left(\frac{N}{n}, b\right) +$$

$$+ \eta \sum_{n=1}^{L} \left( c_5 \frac{N^{3/2} b^{-3/2}}{n^{3/2}} + c_{19} b^2 + c_{20} \frac{N}{n} \right) +$$

$$+ \eta \sum_{n=L+1}^{\infty} \left( c_{23} \frac{N^2}{n^2 b^3} \log \frac{N}{n} + c_2 (N/bn)^{4/3} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, S_2\left(\frac{N}{n}, b\right) + \eta \left( c_{24} N^{3/2} b^{-3/2} + c_{25} \frac{N}{b} + \right.$$

$$\left. + c_{26} N \log N + c_{27} \frac{N^2 b^3}{b^3 N} \log N + c_{28} \frac{N^{4/3} b^{3/2}}{b^{4/3} N^{1/3}} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, S_2\left(\frac{N}{n}, b\right) + \eta\, (c_{29} N^{3/2} b^{-3/2} + c_{30} N \log N).$$

Aus den bekannten Formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n^2} = \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \frac{1}{\zeta(2)}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$$

und aus (5,17) folgt jetzt mit

$$S_3 = N^2 \log N \left(-\frac{2}{\zeta(2)} \Delta^2 \log b\right) +$$

$$+ \frac{N^2}{\zeta(2)} \left\{ \Delta^2 \left( \log b (\log b + 3 - 4C + \frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)}) + \frac{\zeta(3)}{3b^2} \right) + \Delta\, k(b) \right\} \qquad (6,2)$$

$$H(N,b) = S_3 + \eta (c_{29} N^{3/2} b^{-3/2} + c_{30} N \log N) \qquad (6,3)$$

Ist aber $b$ von der Größenordnung $N^{1/2}$ oder größer, so brauchen wir in (6,1) nur Formel (5,20) zu verwenden, um

$$H(n, b) = S_3 + \eta\left(c_{31}\frac{N^2}{b^3}\log N + c_{32}(N/b)^{4/3}\right) \tag{6,4}$$

zu erhalten.

Aus (5,19) und (3,5) folgt noch

$$S_3 = \frac{1}{\zeta(2)}\left(\frac{N}{b+1}\right)^2\left(2\log\frac{N}{b+1} + 4C - 1 - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + \eta\, c_{33}\frac{N^2\log N}{b^3}, \tag{6,5}$$

was für größere $b$ bequemer ist als (6,2).

## 7. Berechnung von L(N, b)

Alle Buchstaben dieser Nummer bedeuten nichtnegative, ganze Zahlen. $L(N, b)$ ist die Lösungszahl des um $y = 0$ erweiterten Systems (2,1) bis (2,6), wobei wegen $p = 1$ die Lösungen jetzt mit der Vielfachheit $2^{1-q}$ zu zählen sind. Setzen wir $ux = w$ und $vx = z$, so gehen unsere Ungleichungen über in

$$bw + z \leqslant N \tag{7,1}$$

$$0 \leqslant z \leqslant w,\ 0 < w \tag{7,2}$$

und (2,6) ergibt $(w, z) = x$. Das zeigt, daß zu jeder Lösung von (7,1), (7,2) eine eindeutig bestimmte Lösung von (2,1) bis (2,6) gehört, in der $y = 0$ ist. $q$ ist auch die Zahl der für die betreffende Lösung in (7,2) geltenden Gleichheitszeichen. Wir bestimmen jetzt $L(N, b)$ durch Zählung der $2^{1-q}$-fach gezählten Lösungen von (7,2) und

$$bw + z = M \tag{7,3}$$

Um ihre Zahl zu bestimmen, setzen wir $M = b(b+1)R + bS + T$, wo

$$0 \leqslant S \leqslant b,\quad 0 \leqslant T \leqslant b - 1 \tag{7,4}$$

ist. Es muß dann $z \equiv T \pmod b$, also $z = bt + T$ sein. Damit entsteht aus (7,3) die Gleichung

$$w + t = (b+1)R + S. \tag{7,5}$$

Wegen $z \leqslant w$ muß außerdem

$$(b+1)t + T = z + t \leqslant (b+1)R + S \tag{7,6}$$

sein.

Ist $T \leqslant S$, so ist (7,6) mit allen Werten $t = 0, \ldots R$ verträglich. Ist $T > S$, so nur mit den Werten bis $R - 1$. Zu jedem Wert für $t$ ergibt sich eindeutig der Wert von $z = bt + T$ und aus (7,5) ein Wert $w$.

Unter Berücksichtigung der Vielfachheiten ergeben sich $2R$ Lösungen, wenn $T > S$ oder $T = S = 0$ ist, $2R + 1$ Lösungen, wenn $T = S$ oder $T = 0$, aber $S \neq 0$ ist, und $2R + 2$ Lösungen, wenn $0 < T < S$. Alle diese Lösungen ergeben, wegen (7,5) und (7,6) auch $w > 0$. Im Falle $R = S = T = 0$ gibt es keine Lösung mit $w > 0$, dann ist aber eben auch $2R = 0$.

Diese Lösungszahlen, für alle $M$ von 1 bis $N$ summiert, ergeben $L(N, b)$. Wir setzen $N = b(b+1)X + bY + Z$, mit $0 \leqslant Y \leqslant b$, $0 \leqslant Z \leqslant b - 1$.

Dann ergibt sich ohne Schwierigkeiten, nach einer etwas umständlichen Rechnung

$$L(N,b) = b(b+1)X^2 + X + 2X(bY+Z) + Y(Y-1) + \operatorname{Min}(2Y, 2Z+1) =$$

$$= \frac{N^2+N}{b(b+1)} - Y + \operatorname{Min}(2Y, 2Z+1) + \frac{+Y(Y-1-2Z)}{b+1} - \frac{Z^2+Z}{b(b+1)} =$$

$$= \frac{N^2+N}{b(b+1)} + \eta\, c_{34} \operatorname{Min}\left(\frac{N}{b}, b\right). \tag{7,7}$$

Die letzte Abschätzung folgt aus $Y \leqslant b$, $Z \leqslant b - 1$ und daraus, daß für $b^2 > N$ $X = 0$, also $Y \leqslant N/b$ ist. Weiters ist

$$\Delta L(N,b) = -N^2 \Delta^2 \frac{1}{b} - \frac{2N}{b(b+1)(b+2)} + \eta\, c_{34} \operatorname{Min}\left(\frac{N}{b}, b\right),$$

$$\Delta L(N,b) = -N^2 \Delta^2 \frac{1}{b} + O(N \log N), \tag{7,8}$$

$$\Delta L(N,b) = -N^2 \Delta^2 \frac{1}{b} + O(N^{4/3} b^{-4/3}). \tag{7,9}$$

## 8. Berechnung von h(N, b)

Die Entwicklungen zweiter Art gehen aus denen erster Art hervor, wenn man den letzten Teilnenner um 1 verkleinert und dafür einen Teilnenner 1 hinzufügt. Ist $b > 1$ und der letzte Teilnenner $b$, so hat also die Entwicklung zweiter Art einen Teilnenner $b$ weniger als die erster Art. Ist aber der letzte Teilnenner $b + 1$, so erhält die Entwicklung zweiter Art einen Teilnenner $b$ mehr. Daraus folgt

$$H(N,b) = 2h(N,b) + L(N, b+1) - L(N,b). \quad (b > 1) \tag{8,1}$$

Ist aber $b = 1$, so enthält die Entwicklung zweiter Art um einen Teilnenner 1 mehr als die erster Art, wenn der letzte Teilnenner der

Entwicklung erster Art nicht 2 ist. Ist er zwei, so enthält die Entwicklung zweiter Art sogar um noch einen Teilnenner 1 mehr. Es ist also jetzt

$$H(N, 1) = 2\,h(N, 1) + L(N, 1) + L(N, 2). \tag{8,2}$$

also für alle $b$

$$H(N, b) = 2\,h(N, b) + \Delta\, L(N, b) + 2\,\delta_{b1}\, L(N, 1).$$

Daraus, aus (7,8), (7,9), (6,3), (6,4) und (6,5) folgen die in Nummer 1 gegebenen Formeln für $h(N, b)$.

Die Formel (1,5) gewinnt man, wenn man (1,1) für alle Werte $b$ von 1 bis $N$ summiert. Für den Rest verwendet man dabei (1,2), solange die Größenordnung von $b$ unter $N^{1/3}$ bleibt, für die größeren $b$ aber (1,3).

Außerdem ist

$$\sum_1^N \Delta^2 f(b) = \Delta f(N+1) - \Delta f(1) = f(2) - f(1) + \Delta f(N+1),$$

$$\sum_1^N \Delta\, k(b) = k(N+1) - k(1).$$

$k(N+1)$ und alle vorkommenden $\Delta f(N+1)$ sind $O(N^{-1})$. So ergibt sich (1,5).

### 9. H(N, b) und h(N, b) für b, die die Größenordnung von N haben

Zu gegebenem $x$ und $u$ gibt es, unter Berücksichtigung der Vielfachheit $2^{2-p-q}$ gerade $x\,\varphi(u)$ Lösungen $(x, y, u, v)$ von (2,2) bis (2,6). (Daß $x$ und $u > 0$ sind, sei vorausgesetzt.) Ist $(b+2)\,x\,u \leqslant N$, so sind sie alle mit (2,1) verträglich, wenn $bxu > N$ ist, keines mehr. Also ist

$$\sum_{(b+2)\,xu \leq N} x\,\varphi(u) \leqslant H(N, b) \leqslant \sum_{bxu \leq N} x\,\varphi(u). \tag{9,1}$$

Nun setzen wir voraus

$$[N/b+2] = [N/b] = K. \tag{9,2}$$

Dann sind beide Summen in (9,1) gleich und es ist

$$H(N, b) = \sum_{xu \leq K} x\,\varphi(u) = \sum_{M=1}^{K} \sum_{d/m} \frac{M}{d}\,\varphi(d). \tag{9,3}$$

Diese Summen kann man für die ersten Werte von $K$ leicht direkt berechnen. Die Bedingung (9,2) ergibt

$$\frac{N}{K+1} < b \leqslant \frac{N}{K} - 2. \tag{9,4}$$

Auf diese Weise fand ich: Erfüllt $b$ die Bedingung (9,4), so ist

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| für $K$ = | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| $H(N,b)$ = | 4 | 16 | 36 | 68 | 104 | 164 | 216 | 296 | 380 | 488 | 572 | 732 | 832 | 988 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| für $K$ = | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| $H(N,b)$ = | 1168 | 1360 | 1452 | 1704 | 1852 | 2140. |

Es sei nun außerdem $b > \sqrt{N}$ vorausgesetzt. Dann ist $h(N,b) = \frac{1}{2} H(N,b)$.

Denn dann ist in (7,7) notwendig, $X = 0$, $Y = K$. Aus (9,2) folgt

$N \geqslant (b+2)Y = b\,Y + 2\,Y$, also $Z \geqslant 2Y$, Min $(2Y, 2\,Z+1) = 2Y$ für $L(N,b)$,

$N \geqslant (b+2)Y = (b+1)\,Y + Y$, also $Z \geqslant Y$, Min $(2Y, 2Z+1) = 2Y$ für $L(N,b+1)$,

so daß $\Delta\, L(N,b) = 0$ ist. Nach (8,1) ist also $H(N,b) = 2\,h(N,b)$.

Für $N/K - 2 < 2 < b \leqslant N/K$ kann man $H(N,b)$ aus der Tabelle abschätzen, $\Delta\, L(N,b)$ aus (7,7) berechnen und damit auch $h(N,b)$ abschätzen.

## 10. Die Funktion k(b)

Aus (5,3), (5,8) und (5,9) ergibt sich

$$-k(b) - \frac{\zeta(3)}{3}\,\Delta\, b^{-2} = 4 \sum_{x=1}^{\infty} \left\{ \sum_{y=0}^{x} \frac{2^{-p}}{x(bx+y)} - \frac{1}{x} \log \frac{b+1}{b} \right\} = 4\,K(b).$$

Zur funktionentheoretischen Untersuchung von $k(b)$ genügt es, $K(b)$ zu betrachten. Nach Nr. 5 ist $K(b)$ für $|\, b + \frac{1}{2}\,| > \frac{1}{2}$ regulär. Wir werden $K(b)$ in Potenzreihen nach $b - \varrho$ entwickeln, wo $\varrho = \pm\, i - \sigma$, $0 < \sigma < 1$, $\sigma$ rational ist. Wir zeigen, daß der Konvergenzradius dieser Potenzreihen 1 ist, woraus ohne weiters folgt, daß die Strecke $[-1, 0]$ singuläre Linie für $K(b)$ und $k(b)$ ist und daß diese Funktionen außerhalb dieser Strecke auf der ganzen Zahlenkugel regulär sind. Weil $K(b)$ für reelle $b$ reell ist, genügt es, $\varrho = i - \sigma$ zu betrachten. Entwicklung von $\log(b+1) - \log b$ und $(bx+y)^{-1}$ in Potenzreihen und Anwendung der Eulerschen Summenformel gibt mit den Bezeichnungen

$$a_n(x) = \frac{n-2}{12\,x^3}\,(\varrho^{1-n} - (1+\varrho)^{1-n}),$$

$$b_n(x) = \frac{(n-2)\,(n-1)}{2\pi^2\,x^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^x (\varrho + \frac{y}{x})^{-n} \cos 2\,k\,\pi\,y\,dy,$$

$$K(b) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\,(b-\varrho)^{n-3} + \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{n=3}^{\infty} b_n(x)\,(b-\varrho)^{n-3}.$$

Die mit $a_n(x)$ gebildete Summe gibt ohneweiteres eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius Min $(|\,|\,\varrho\,|, |\,1+\varrho\,|\,) > 1$ ist. Weil $|\,\varrho + \frac{y}{x}\,| > 1$ ist, ist $b_n(x) = x^{-3}\,O(n^2)$, die Summationen in der mit $b_n(x)$ gebildeten Doppelsumme dürfen vertauscht werden und der Konvergenzradius der entstehenden Potenzreihe ist mindestens 1. Wir werden zeigen, daß

$$\sum_{x=1}^{\infty} b_n(x) = \frac{(-i)^n \pi^2}{6\,p^2} + O(1) \tag{10,1}$$

ist, worin $P$ den reduzierten Nenner von $\sigma$ bedeutet. $P$ braucht nicht Primzahl zu sein. Also ist der Konvergenzradius 1.

Durch $y = x(z+\sigma)$ führen wir $z$ ein:

$$\frac{2\pi^2 i^n x^3 b_n(x)}{(n-2)\,(n-1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{-\sigma}^{1-\sigma} \cos 2k\pi(z+\sigma) \exp\,[-n \log\,(1-iz)]\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T(n,k,x)}{k^2}.$$

Weil im Integrationsintervall $|\,z\,| < 1$ ist, ist dort

$$|\exp\,(-n \log\,(1-iz))\,| = \exp\,(-n \log\,(1+z^2)) < \exp\,(-nz^2/4).$$

Fehler von $T(n,k,x)$ der Größenordnung $o(n^{-2})$ stören uns beim Beweis von (10,1) nicht. Es sei $u = \sqrt{10 \log n/n}$. Weil

$$\int_{u}^{\infty} \exp\,(-nz^2/4)\,dz < n^{-3}$$

ist, und weil $u$ kleiner als $\sigma$ ist[4], genügt es, die Integrale zwischen $-u$ und $u$ zu berechnen. Dort ist

$$\exp\,(-n \log\,(1-iz)) = (1+c_1 nz^3 + c_2 nz^4 + c_3 nz^5 + c_4 n^2 z^6 + c_5 n^2 z^7 + c_6 n^3 z^9 + O(nz^6 + n^2 z^8 + n^3 z^{10} + n^4 z^{12}))\exp\,(niz - nz^2/2), \tag{10,2}$$

mit Konstanten $c_1$ bis $c_6$. Den Summanden in der großen Klammer entsprechend zerlegen wir $T(n,k,x)$ in mehrere Integrale. Wegen

$$\int_{0}^{\infty} n^c z^d \exp\,(-nz^2/2)\,dz = \text{const.}\; n^{(2c-d-1)/2}$$

[4] Wir nehmen an, daß $n$ so groß ist, daß alle Ungleichungen, wenn sie nur für große $n$ erfüllt sind, richtig sind.

kann das vom $O$-Glied in (10,2) herrührende Integral außer Betracht bleiben. Weil weiters

$$n^3 \int_u^1 \exp(-nz^2/2)\,dz < n^{-4/3}$$

und für hinreichend großes $n$

$$n^3 \int_1^\infty z^9 \exp(-nz^2/2)\,dz < n^3 \int_1^\infty z \exp(-nz^2/4)\,dz = o(n^{-2})$$

ist, können die übrigen Integrale alle von $-\infty$ bis $\infty$ statt von $-u$ bis $u$ erstreckt werden. Setzt man noch $2k\pi x \pm n = \lambda$, so ergibt sich $T(n, k, x)$ bis auf einen Fehler der Größenordnung $o(n^{-2})$ als eine endliche Summe von Ausdrücken der Formen

$$A \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2k\pi x\sigma \int_{-\infty}^{\infty} n^c z^d \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \lambda z \exp(-nz^2/2)\,dz$$

worin $A$ Konstante, $c$ und $d$ die aus (10,2) sich ergebenden Zahlen bedeuten, und vor und im Integral unabhängig voneinander cos und sin stehen kann. Für $c = d = 0$ und cos vor dem Integral ist $A = 1/2$. Wir wenden auf die Integrale, soweit sie nicht trivialerweise verschwinden, die Formeln 337.2a und 337.2b aus der Integraltafel [4] an. Für die in 337.2b auftretende Pochhammer-Kummersche Reihe gilt, wie leicht zu sehen

$$F(1 + d/2, 3/2, x) = e^x \text{ (Polynom in } x \text{ des Grades } (d-1)/2).$$

So ergeben sich für die Integrale mit $d \neq 0$ endliche Summen von Ausdrücken der Form

$$\text{const}\ \lambda^m n^{-(M+2)/2} \exp(-\lambda^2/2n)$$

sowie anderer Ausdrücke, die sich vom vorstehenden durch Faktoren $n^{-1/2}$ bzw. $n^{-1}$ unterscheiden. $M$ kann dabei die Werte 0, 1, 2, ... 9 haben. Nach Formel 314.7a derselben Tafel ist

$$\tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda z \exp\left(-\frac{nz^2}{2}\right) dz = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2n}\right).$$

Also ist

$$\frac{2\pi^2 i^n}{(n-1)(n-2)} \sum_{x=1}^{\infty} b_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x\sigma + A \sin 2k\pi x\sigma}{k^2 x^3} \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2n}\right) + O\left( \sum_{M=0}^{9} \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{-\frac{M+2}{2}} \lambda^M \exp(-\lambda^2/2n)}{k^2 x^3} \right) + o(n^{-2}) \tag{10,3}$$

worin $A$ eine Konstante ist.

Setzen wir $\sqrt{54\,n\log n} = w$! Für $t \geqq w$ ist $2\,t^2/6\,n \geqq 18\log n$ und wegen der Monotonie von $t^2/\log t$ auch $t^2/\log t \geqq 54\,n$, also $t^2/2\,n \geqq 9\log t + 18\log n$. Daher ist, wenn wir die Summation nur über die $x$ und $k$ erstrecken, für die

$$|\lambda| = |2\,k\pi\,x \pm n| \geqq w \tag{10,4}$$

ist,

$$\sum_{x,k} x^{-3}\,k^{-2}\exp(-\lambda^2/2\,n) = O(n^{-18}). \tag{10,5}$$

Damit (10,4) nicht erfüllt ist, muß bei festem $x$

$$\frac{n-\sqrt{54\,n\log n}}{2\pi\,x} < k < \frac{n+\sqrt{54\,n\log n}}{2\pi\,x} \tag{10,6}$$

sein. Die Anzahl dieser $k$ ist $O(\sqrt{n\log n/x})$ und für sie ist

$$k = (1+o(1))\,\frac{n}{2\pi\,x}, \tag{10,7}$$

also erhalten wir bei Summation über dieses $k$

$$n^{-\frac{M+2}{2}} \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{k} x^{-3}\,k^{-2}\,\lambda^M = O(n^{-\frac{5}{2}}(\log n)^{\frac{M+1}{2}}) = o(n^{-2}). \tag{10,8}$$

Zusammen mit (10,5) ergibt das für das $O$-Glied in (10,3) die Größenordnung $o(n^{-2})$. Auch für das Hauptglied rechts in (10,3) ist nach (10,5) der Beitrag aller Glieder, für die (10,4) gilt, $o(n^{-2})$. Für die Glieder deren $k$ im Intervall (10,6) liegt, erhalten wir ebenso wie soeben, wenn $X$ die Größenordnung von $n^{1/4}$ hat

$$\sum_{x\geq X} \sum_{k} n^{-1/4}\,x^{-3}\,k^{-2} = O\Big(\sum_{x\geq X} n^{-2}\,x^{-2}\sqrt{\log n}\Big) = o(n^{-2}).$$

Wir brauchen nur mehr die Glieder mit $x < X$ und $k$ in (10,6) zu betrachten. Für sie nehmen wir von den Enden des Intervalles (10,6) soviel weg, daß wir ein Intervall der Form $[c, d]$ mit ganzen $c$, $d$ und $P \mid d - c$ erhalten. ($P$ war der reduzierte Nenner von $\sigma$). Wir müssen dazu höchstens Stücke der Länge $P$ abschneiden. Ihr Beitrag zur rechten Seite von (10,3) ist wegen (10,7):

$$\sum_{x<X} O(x^{-1}\,n^{-1/4}) = o(n^{-2}).$$

Innerhalb $[c, d]$ gilt, wenn $|k_1 - k| \leqq P$ ist und $\lambda_1$ zu $k_1$ gehört,

$$\exp(-\lambda_1^2/2n) = (1 + o(1)) \exp(-\lambda^2/2n), \tag{10,9}$$

weil

$$|\lambda_1^2 - \lambda^2| \leqslant 2\pi X P |\lambda_1 + \lambda| < 4\pi XPw = o(n)$$

ist. Ist nun $x$ ein Vielfaches von $P$, so ist $\cos 2k\pi x\sigma = 1$, $\sin 2k\pi x\sigma = 0$ und mit (10,7 und 9) erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{d-1} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{\cos 2k\pi x\sigma + A \sin 2k\pi x\sigma}{k^2 x^3} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2n}\right) =$$

$$= (1 + o(1)) \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{4\pi^2 x^2}{n^2 x^3} \int_c^d \exp\left(-\frac{(2k\pi x - n)^2}{2n}\right) dk =$$

$$= (1 + o(1)) \frac{2\pi^2}{n^2 x^2}. \tag{10,10}$$

Die Substitution $2k\pi x = n + v\sqrt{2n}$ gibt nämlich für $k = c$ und $k = d$ die Grenzen $v = \pm\sqrt{27 \log n} + o(1)$.

Ist $x$ kein Vielfaches von $P$, so ist die Summe von $P$ aufeinander folgenden $\cos 2k\pi x\sigma$ oder $\sin 2k\pi x\sigma$ Null und wenn man in der in (10,10) berechneten Summe immer $P$ aufeinander folgende Glieder zusammennimmt und auf sie (10,7 und 9) anwendet, so heben sich alle nicht mit $o(1)$ multiplizierten Summanden auf und nach (10,10) bleibt nur $o(n^{-2})\, x^{-2}$ übrig.

So erhalten wir schließlich

$$\sum_{x=1}^{\infty} b_n(x) = (-i)^n (1 + o(1)) \sum_{\substack{x=1 \\ P|x}}^{\infty} \frac{1}{x^2}$$

also (10,1).

## 11.

Die Formel

$$\frac{n}{kn + z} = \frac{1}{k + \frac{z}{n}},$$

zeigt, daß der Bruch $n/(kn + z)$ um einen Teilnenner $b$ mehr hat als der Bruch $z/n$, falls $k = b$ ist, sonst aber gleich viele. Also kann man in einer Tabelle mit den beiden Eingängen $z$ und $n$ von kleinen Werten $z$ und $n$ ausgehend, schnell die Zahl der zu den Entwicklungen erster (oder auch erster und zweiter) Art von $z/n$ gehörigen Teilnenner anschreiben.

Um etwa eine Tabelle für die Zahl der Teilnenner $b$ in denEntwicklungen erster Art der Brüche $z/n$ herzustellen, geht man so vor: Man sieht Zeilen für $z = 0, 1, 2, 3, \ldots$ und Spalten für $n = 1, 2, 3, \ldots$ vor. In die Zeile für $z = 0$ kommen lauter Nullen. Sind die Zeilen bis $z = Z$ ausgefüllt, so füllt man die nächste Zeile aus, indem man im Feld $z = n = Z + 1$ beginnend, die darüber liegende, von oben nach unten gelesene Spalte zunächst $(b - 1)$mal abschreibt, dann die um 1 vermehrten Zahlen dieser Spalte anfügt und dann die Spalte selbst so lange wiederholt, bis man an das Ende der (in der Praxis ja stets endlichen Zeile) kommt. Ist $b = 1$, so würden auf diese Weise die Felder $z = n$ mit Einsern ausgefüllt. Statt deren sind aber Nullen zu schreiben. $h(N, b)$ ist dann die Summe der Zahlen in den Spalten von $n = 1$ bis $n = N$.

Beispiel für $b = 2$

| $z$ \ $n$ = | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | | | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| 4 | | | | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 5 | | | | | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 |

Man sieht auch leicht, daß es zur Zählung von $h(N, b)$ genügt, die Tabelle bis $z = N/2$, $n = N$ auszufüllen. Die übrigen erforderlichen Zahlen stehen dann, für $b = 1$ um 1 zu klein, bereits übersichtlich in den Feldern mit $N/2 < n \leqslant N - z$.

## 12. Numerische Untersuchungen

Wie schon im letzten Absatz der Einleitung gesagt, wurden die Fehler $F(N)$ für $N = 2$ bis 433 berechnet. Sie schwanken mit wachsendem $N$ sehr stark. Es kommen immer wieder positive und negative Fehler vor, wenn auch die negativen mit wachsendem $N$ immer seltener werden. Man hat den Eindruck, daß $\max\limits_{N \leq k} F(N) - \min\limits_{N \leq k} F(N)$ mit $k$ etwa linear zunimmt, daß aber auch der durchschnittliche Wert von $F(N)$ ansteigt. Um ein besseres Bild über den durchschnittlichen Verlauf zu gewinnen, wurden die Summen

$$\Sigma'_k F(N) = \sum_{N=50k+2}^{50k+52} F(N) - {}^1/_2 F(50k + 2) - {}^1/_2 F(50k + 52)$$

für $k = 0, 1, \ldots 7$ gebildet. Ähnliches wie für $F(N)$ gilt auch für $F(N, b)$, nur kann man bei den größeren $b$, etwa von $b = 4$ an, nicht mehr sagen, daß der mittlere Wert der $F(N, b)$ zunehme und daß negative Werte seltener seien als positive. Auch für die $F(N, b)$ wurden die Summen $\Sigma_k'$ berechnet.

Bei der Durchsicht der Zahlen $F(N)$ und $F(N, b)$ glaubt man auch, periodische Schwankungen zu sehen, z. B. liegen die Werte von $N$, für die $F(N)$ besonders niedrig ist, oft um etwa 16 auseinander. Besonders deutlich werden solche wellenförmige Schwankungen bei den größeren Werten von $b$, wo sie sich auch in den Summen $\Sigma_k'$ ausdrücken.

Es folgen die Werte $\Sigma_k'$:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(N)$ | 153,5 | 487,0 | 1202,0 | 1871,5 | 2922,0 | 4137,0 | 5067,5 | 6933,0 |
| $b = 1$ | 128,5 | 339,5 | 574,5 | 792,0 | 1080,5 | 1294,5 | 1363,0 | 1486,0 |
| $b = 2$ | 61,5 | 106,5 | 278,5 | 384,5 | 369,0 | 657,0 | 632,0 | 704,5 |
| $b = 3$ | 22,0 | 90,5 | 152,5 | 164,0 | 394,5 | 359,0 | 279,5 | 1057,5 |
| $b = 4$ | 18,0 | 21,5 | 106,0 | 92,5 | −12,5 | 187,0 | 50,5 | 43,0 |
| $b = 5$ | 7,5 | 57,5 | 7,5 | −3,5 | 177,0 | −117,0 | 183,0 | −73,5 |
| $b = 6$ | 9,5 | 31,5 | 82,0 | 147,5 | 38,0 | 332,5 | 129,0 | 519,5 |
| $b = 7$ | 9,5 | 20,0 | −41,0 | 12,5 | 9,5 | 53,5 | −70,5 | −309,0 |
| $b = 8$ | −0,5 | 34,5 | 86,5 | 32,5 | 79,5 | −51,0 | 357,5 | 175,5 |
| $b = 9$ | 6,5 | 10,5 | −29,0 | −11,0 | 114,5 | 133,0 | −200,0 | 298,0 |
| $b = 10$ | 3,0 | −6,0 | −30,5 | 14,0 | −23,5 | −143,0 | −99,5 | −266,5 |

Trägt man die Werte der ersten Zeile zu den Abszissen $27 + 50\,k$ auf Millimeterpapier auf, so scheint es, als ob die so erhaltenen Punkte auf einer semikubischen Parabel liegen würden. Um die daraus folgende Annahme zu prüfen, daß $F(N)$ um einen Mittelwert der Formel

$\alpha\,N + \beta\,N\sqrt{N}$ schwanke, wurden die Summen $\Sigma_k'\,N$ und $\Sigma_k'\,N\sqrt{N}$ gebildet und $\alpha$ und $\beta$ so bestimmt, daß

$$\sum_k [\Sigma_k'\,F(N) - \alpha\,\Sigma_k'\,N - \beta\,\Sigma_k'\,N\sqrt{N}]^2$$

ein Minimum wurde. Es ergibt sich die Regressionslinie

$$-0{,}0761\,N + 0{,}0222\,N\sqrt{N}. \tag{12,1}$$

Die geringen Abweichungen 83,5; 20; 89; −76,5; −16; 68; −275; 238 schienen den Arbeitsaufwand zur Berechnung einer Regressionslinie der Form $\alpha\,N + \beta\,N\sqrt{N}$ mittels der Werte $F(N)$ selbst zu rechtfertigen[5]. Da aber die Schwankungen der $F(N)$ und damit die zu erwartenden Abweichungen von der Regressionslinie ungefähr linear mit $N$ zuzunehmen scheinen, erscheint es richtiger, eine Regressionslinie der Form $\alpha + \beta\sqrt{N}$ durch die Werte $F(N)/N$ zu legen. Das Mathematische Labor der Technischen Hochschule Wien hat für mich die Rechnungen durchgeführt, und zwar nicht nur für $F(N)$, sondern auch für die $F(N, b)$. Es bedeute $y_0(N) = F(N)/N$, $y_b(N) = F(N, b)/N$, ferner sei $\alpha_i + \beta_i\sqrt{N}$ die Regressionslinie durch $y_i(N)$ und $z_i(N) = y_i(N) - \alpha_i - \beta_i\sqrt{N}$. Dann sind die Ergebnisse in folgender Tabelle zusammengefaßt:

| $i$ | $\alpha_i$ | $\beta_i$ | $\Sigma\,y^2$ | $\Sigma\,z^2$ | Max $\lvert z \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −0,0196 | 0,01912 | 49,73 | 19,73 | 0,60 |
| 1 | 0,0941 | −0,00025 | 8,51 | 4,96 | 0,28 |
| 2 | 0,0384 | 0,00015 | 2,06 | 1,35 | 0,16 |
| 3 | 0,0138 | 0,00093 | 1,05 | 0,73 | 0,23 |
| 4 | 0,0179 | −0,00080 | 0,56 | 0,48 | 0,18 |
| 5 | 0,0099 | −0,00041 | 0,46 | 0,45 | 0,16 |

[5] Die versuchsweise berechnete Regressionslinie $\alpha\,N + \beta\,N\log N$ ergab viel schlechtere Resultate.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | −0,0016 | 0,00109 | 0,53 | 0,43 | 0,14 |
| 7 | 0,0141 | −0,00121 | 0,42 | 0,40 | 0,12 |
| 8 | 0,0040 | 0,00025 | 0,44 | 0,42 | 0,14 |
| 9 | −0,0007 | 0,00030 | 0,45 | 0,45 | 0,13 |
| 10 | 0,0066 | −0,00080 | 0,47 | 0,45 | 0,12 |

Das Max $|z|$ tritt von $i = 2$ an bei den ersten Werten von $N$ auf, aber Max $|z_0| = z_0(210)$ und Max $|z_1| = -z_1(251)$. Die Werte von $y_i$ und $z_i$ für kleine $N$ werden dadurch etwas verfälscht, daß $h^*$ durch Abrundung gebildet wurde. Nach der Division durch $N$ beeinflußt der Rundungsfehler die Werte $y$ für kleine $N$ viel stärker, als für große.

Für $i = 0$ und 1 sind innerhalb der Intervalle $(-\text{Max}\,|z_i|, \text{Max}\,|z_i|)$ die $z_i$ ziemlich gleichmäßig verteilt, wenn auch eine leichte Bevorzugung der Mitte festzustellen ist. Für $i > 1$ wurde diese Verteilung nicht untersucht.

Der geringe Unterschied zwischen $\Sigma y_i^2$ und $\Sigma z_i^2$ von $i = 4$ an läßt die für $b(= i) \geqslant 4$ berechneten Regressionslinien sehr zweifelhaft erscheinen.

Interessant ist, daß der Koeffizient $\beta_0$ viel größer als die Summe der $\beta_i$, für $1 \leqslant i \leqslant 10$ ist, obwohl doch $F(N)$ gleich der Summe der $F(N, b)$ sein sollte. Allerdings ist (1,8) die Summe von (1,9) über alle $b$, während nur über die $b$, die kleiner als $N$ sind, summiert werden sollte. Die sich so ergebende Abweichung hat aber nur die Größenordnung $N$, könnte also die Abweichung von $\alpha_0$ von der Summe der übrigen $\alpha_i$ erklären. Das Auftreten eines durchaus merklichen $\beta_0$, das auch mit dem $\beta$ aus (12,1) recht gut übereinstimmt, *läßt vermuten, daß ein Glied der Größenordnung* $N^{3/2}$ *im Rest von* (1,5) *wirklich auftritt*. Deswegen müßten solche Glieder in den Resten von (1,1) nicht vorkommen. Auch Glieder der Form $Nb^{-1/4}$ würden, über $b$ zwischen 1 und $N$ summiert, ein solches Glied ergeben.

Auch die anfangs erwähnten Schwankungen könnten die Werte der $\alpha_i$ und $\beta_i$ erheblich fälschen. Vielleicht würde eine Weiterführung der Rechnungen, wesentlich über $N = 433$ hinaus, weitere Schlüsse erleichtern. Natürlich können auf diese Weise niemals sichere Ergebnisse erschlossen werden.

## Literatur

[1] *O. Perron*, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Berlin: Teubner, 1913, S. 27ff. und S. 32.

[2] Dasselbe, Stuttgart: Teubner, 1954, S. 22—27.

[3] *P. Bachmann*, Die analytische Zahlentheorie, Leipzig: Teubner, 1894, S. 438—440.

[4] *W. Gröbner* und *N. Hofreiter*, Integraltafel, Zweiter Teil, Bestimmte Integrale, Wien: Springer, 1950.

[5] *G. Lochs*, Über die Anzahl der Gitterpunkte in einem Tetraeder. Mh. Math. **56**, S. 233—239.

# Die konstant gedrallte Netzfläche 4. Grades

Von

**H. Brauner**, Wien

*(Eingegangen am 4. Mai 1960)*

Mit 1 Textabbildung

In einer Reihe von Arbeiten habe ich in letzter Zeit jene windschiefen Strahlflächen behandelt, deren Drall für sämtliche Erzeugenden einen konstanten Wert (ungleich 0 oder $\infty$) besitzt [1], [2], [3], [4]. Insbesondere ist es bei diesen Untersuchungen, die ich einer Anregung von *J. Krames* verdanke, gelungen, eine von *J. Krames* [5], ([6], 241f.) aufgefundene Cayleysche Strahlfläche 3. Grades, die den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert und eine zylindrische Erzeugende 2. Ordnung besitzt als *einzige Fläche 3. Grades mit konstantem Drall* nachzuweisen [3]. Dabei wurden jedoch nur Strahlflächen in Betracht gezogen, die mindestens eine stetige Schar reeller Erzeugenden tragen; den folgenden Untersuchungen werden ebenfalls nur solche *„reellen Strahlflächen"* zugrunde gelegt. Sie enthalten zu jeder komplexen Erzeugenden auch die konjugiert komplexe; ist eine ihrer Torsallinien komplex, so ist auch die konjugiert komplexe Gerade Torsallinie der Fläche. Neben dem einschaligen Drehhyperboloid und den Binormalenflächen algebraischer Raumkurven konstanter Torsion stellt obige Fläche 3. Grades das einzige bisher bekannte Beispiel einer algebraischen konstant gedrallten Strahlfläche dar.

In dieser Mitteilung werden die *reellen Netzflächen 4. Grades von konstantem Drall* aufgesucht. Es existiert — bis auf Ähnlichkeiten — eine einzige Fläche dieser Art; sie ist nach der Sturmschen Einteilung von VIII. Art, besitzt eine Ferntorsallinie 2. Ordnung und oskuliert den absoluten Kegelschnitt doppelt. Diese Fläche kommt in der Literatur bisher nicht vor.

## 1.

Die Erzeugenden einer Strahlfläche $\Phi$ werden durch ihre zu den kartesischen Koordinaten $x = x_1 : x_0$, $y = x_2 : x_0$, $z = x_3 : x_0$ gehörigen

Plückerkoordinaten $p_1 : \ldots : p_6$ gegeben, die stetig differenzierbare Funktionen eines Parameters $t$ seien. Zwischen diesen Plückerkoordinaten gilt identisch in $t$

$$\Omega(p) \equiv 2(p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6) = 0. \tag{1}$$

Ist $a$ der Abstand zweier Nachbarerzeugenden $e$ und $e_1$ von $\Phi$ und $\varphi$ ihr Winkel, so versteht man unter dem Drall $d$ von $\Phi$ längs der Erzeugenden $e$

$$d = \lim_{e_1 \to e} \frac{a}{\varphi}. \tag{2}$$

Unter Verwendung des Richtungsvektors $\mathfrak{a}(t) = (p_1, p_2, p_3)$ der Erzeugenden und des Vektors $\mathfrak{z} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}'$ (wobei der Akzent die Differentiation nach $t$ bedeutet), der die Richtung der Zentraltangenten angibt, berechnet man an Stelle des Ausdrucks (2)

$$d = \frac{\Omega(p')\, \mathfrak{a}^2}{2\, \mathfrak{z}^2}. \tag{3}$$

Eine algebraische Strahlfläche besitzt eine durch ihre Ordnung und ihren Rang bestimmte Zahl von isotropen Erzeugenden und Torsallinien, die insbesondere zylindrisch sein können; für diese besonderen Erzeugenden nimmt der Drall $d$ im allgemeinen die Werte 0 oder $\infty$ an. Soll nun $\Phi$ einen von 0 und $\infty$ verschiedenen konstanten Drall besitzen, so muß (3) für diese besonderen Erzeugenden eine unbestimmte Form werden und die (unter Umständen wiederholte) Anwendung der Regel von de l'Hopital einen vorgeschriebenen Wert für $d$ liefern. Diese in [3] durchgeführte Diskussion ergibt folgende für windschiefe Strahlflächen konstanten Dralls notwendige Bedingungen:

**Satz 1**: *Eine windschiefe Strahlfläche kann nur dann konstant gedrallt sein, wenn*

a) *jede eigentlich nicht torsale isotrope Erzeugende eine isotrope asymptotische Ebene besitzt sowie*

b) *jede eigentliche Torsallinie entweder eine isotrope Torsalebene aufweist bzw. eine zylindrische Erzeugende mindestens zweiter Ordnung oder eine isotrope zylindrische Erzeugende ist und*

c) *zu jeder isotropen asymptotischen Ebene entweder eine Torsallinie oder eine isotrope Erzeugende gehört.*

**Satz 2**: *Eine windschiefe Strahlfläche konstanten Dralls besitzt keine reelle gewöhnliche Fernerzeugende, keine reelle Ferntorsallinie erster Ord-*

*nung mit eigentlicher Torsalebene und keine reelle gewöhnliche Fernrückkehrerzeugende*[1].

## 2.

Es ist zweckmäßig, zunächst jene Netze ins Auge zu fassen, die einen uneigentlichen Brennstrahl $e$ besitzen. Sämtliche in solchen Netzen enthaltenen konstant gedrallten Strahlflächen können nämlich direkt bestimmt werden. Ist der zweite Brennstrahl $f$ dieses Netzes eigentlich, das Netz also hyperbolisch, so ist die Netzfläche ein (im allgemeinen schiefes) Konoid. Wir fragen zunächst nach *allen konstant gedrallten Konoiden.*

Ein kartesisches Koordinatensystem $(x, y, z)$ werde so gewählt, daß $e$ die Ferngerade der $xy$-Ebene wird und $f$ unter Verwendung eines Parameters $\mu$ die Darstellung

$$x = \mu \sin \omega, \quad y = 0, \quad z = \mu \cos \omega \quad (\omega \text{ konstant}) \tag{4}$$

erhält. Die Plückerkoordinaten der Strahlen des durch $e$ und $f$ bestimmten Netzes sind dann Funktionen von $\mu$ und eines weiteren Parameters $\lambda$ und es gilt

$$p_1 : \ldots : p_6 = 1 : \lambda : 0 : -\lambda\,\mu\cos\omega : \mu\cos\omega : \lambda\,\mu\sin\omega. \tag{5}$$

Jede in diesem Netz enthaltene Netzfläche $\Phi$ kann durch eine Gleichung der Form $\lambda = \lambda(\mu)$ gegeben sein. Sodann errechnet man für den Drall dieser Fläche nach (3):

$$d = \cos\omega \,.\, (\lambda^2 + 1) \,.\, \frac{d\mu}{d\lambda}. \tag{6}$$

Für konstantes $d$ kann (6) integriert werden und unter Verwendung etwa der Anfangsbedingung $\lambda = 0$ für $\mu = 0$ erhält man

$$\lambda = \operatorname{tg}\left(\frac{\cos\omega}{d} \cdot \mu\right). \tag{7}$$

Die zugehörige Fläche besitzt nach (5) und (7) die Gleichung

$$x - y \operatorname{ctg} \frac{z}{d} - z \operatorname{tg} \omega = 0. \tag{8}$$

Diese transzendente Fläche ist für $\omega = 0$ eine Wendelfläche, die durch euklidische Verschraubung der $x$-Achse um die $z$-Achse entsteht. Durch Anwendung der Affinität

[1] Die Fernrückkehrerzeugenden wurden in [3] nicht behandelt; das obige Ergebnis folgt jedoch aus den dort angegebenen Formeln.

$$\bar{x} = x + z \operatorname{tg} \omega, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z \tag{9}$$

geht die Wendelfläche in die Fläche (8) über; bei dieser Affinität bleiben u. a. die absoluten Punkte des Brennstrahles $e$ fest. (8) ist daher Wendelfläche einer zur euklidischen Metrik affinen Metrik, wobei das ausgeartete Grundtetraeder der Schraubung zwei absolute Punkte zu Ecken hat. Das Büschel der bei dieser affinen Schraubung festbleibenden *Schraub-$F_2$* besteht aus koaxialen schiefen Kreiszylindern.

**Satz 3**: *Die einzigen konstant gedrallten Konoide sind die Wendelflächen der euklidischen und jener affinen Schraubungen, bei denen zwei Ecken des Grundtetraeders Punkte des (euklidisch) absoluten Kegelschnittes sind.*

Daß die euklidischen Wendelflächen die einzigen geraden Konoide konstanten Dralls sind, habe ich bereits in [1] nachgewiesen.

Als zweiten Fall werden jene Netzflächen behandelt, die in einem *parabolischen Netz um eine uneigentliche Gerade $e$* liegen. Für eine reelle Fläche ist $e$ reell und kann in der Ferngerade der $xy$-Ebene angenommen werden. Liegen ferner die durch den Fernpunkt der $x$-Achse gehenden Netzstrahlen in der Ebene $z = 0$, so besitzt das Netz unter Verwendung zweier Parameter $\lambda$ und $\mu$ die Darstellung

$$p_1 : \ldots : p_6 = 1 : k\,\mu : 0 : -k\,\mu^2 : \mu : \lambda \quad (k \neq 0). \tag{10}$$

Eine in diesem Netz enthaltene Fläche ist dann durch $\lambda = \lambda(\mu)$ festgelegt und für ihren Drall gilt nach (3)

$$d = \frac{1}{k} + k\,\mu^2; \tag{11}$$

dieser Ausdruck ist für $k \neq 0$ niemals unabhängig von $\mu$, d. h.:

**Satz 4**: *Eine in einem parabolischen Netz mit Fernbrennstrahl enthaltene Strahlfläche ist niemals konstant gedrallt.*

## 3.

Jede *Strahlfläche 4. Grades* ist in einem linearen Strahlkomplex oder einem Strahlnetz enthalten[2]. Die von *R. Sturm* eingeführte Einteilung der Strahlflächen 4. Grades nach der Art ihrer Doppelkurve und Doppeltorse unterscheidet 12 Arten solcher Flächen, wobei die

[2] Eine lehrbuchartige Behandlung der Strahlflächen 4. Grades findet sich bei *E. Müller — J. Krames* ([6], S. 246ff.). Sämtliche im folgenden verwendeten Eigenschaften solcher Flächen, die nicht mit anderen Zitaten versehen sind, können in diesem Buche nachgelesen werden.

Flächen I. und II. Art (die beide vom Geschlecht 1 sind) sowie die rationalen Strahlflächen der VII., VIII., X. und XII. Art Netzflächen sind. Unter diesen Netzflächen 4. Grades sollen nun jene konstanten Dralls herausgefunden werden.

**Flächen I. Art**: Diese Netzflächen $\Phi_{\mathrm{I}}$ sind durch eine (2,2)-Korrespondenz zwischen den getrennten reellen oder konjugiert komplexen Netzbrennstrahlen $e$ und $f$ bestimmt, welche die Doppelkurve der Fläche abgeben und somit die Kuspidalpunkte der stets getrennten acht Torsallinien erster Ordnung enthalten. Die Ebenenbüschel um $e$ und $f$ bilden die Doppeltorse der Fläche, je vier der acht stets getrennten Torsalebenen gehen durch $e$ bzw. $f$. Besitzt $\Phi_{\mathrm{I}}$ keine Fernerzeugende und keine zylindrische Erzeugende, so müssen, falls $\Phi_{\mathrm{I}}$ konstant gedrallt ist, sämtliche acht Torsallinien erster Ordnung nach Satz 1 zu isotropen Torsalebenen gehören. Da durch $e$ und $f$ insgesamt nur höchstens vier isotrope Ebenen existieren, müßten Torsalebenen zusammenfallen, was nach Obigem unmöglich ist. Ebenso besitzt $\Phi_{\mathrm{I}}$ keine eigentlichen zylindrischen Erzeugenden; diese wären nämlich von erster Ordnung und nach Satz 1 isotrop, d. h. $e$ und $f$ sollten durch zwei konjugiert isotrope Kuspidalpunkte gehen und durch jeden Netzträger gäbe es in diesem Falle noch drei weitere Torsalebenen, die — ohne zusammenzufallen — sämtlich isotrop sein müßten. Besitzt $\Phi_{\mathrm{I}}$ schließlich eine Fernerzeugende, so ist diese sicher reell; nach Satz 2 müßte sie eine Ferntorsallinie erster Ordnung mit uneigentlicher Torsalebene sein. Da alle Torsalebenen einen Brennstrahl enthalten, wäre dann ein Brennstrahl uneigentlich. Nach Satz 3 existiert aber keine konstant gedrallte Fläche 4. Grades dieser Art.

**Flächen II. Art**: Eine solche Fläche $\Phi_{\mathrm{II}}$ entsteht aus einer I. Art, wenn die beiden Brennstrahlen $e$ und $f$ zusammenrücken. $\Phi_{\mathrm{II}}$ liegt demnach in einem parabolischen Netz um eine reelle Gerade $e$ und enthält vier stets getrennte Torsallinien zweiter Ordnung. Besitzt $\Phi_{\mathrm{II}}$ keine Fernerzeugende und keine zylindrische Erzeugende, so müßten für konstantem Drall nach Satz 1 sämtliche Torsalebenen isotrop sein und (da durch $e$ nur zwei isotrope Ebenen existieren) zweimal zwei Torsalebenen zusammenfallen, was aber bei einer $\Phi_{\mathrm{II}}$ unmöglich ist. Für eine eigentliche Leitlinie $e$ kommen weiters keine isotropen zylindrischen Erzeugenden vor, weil sämtliche Kuspidalpunkte einer $\Phi_{\mathrm{II}}$ stets auf der reellen Geraden $e$ liegen. Besitzt $\Phi_{\mathrm{II}}$ eine nicht isotrope zylindrische Erzeugende (jedoch keine Fernerzeugende), so läge nach Satz 1 eine zylindrische Erzeugende zweiter Ordnung mit dem Kuspidalpunkt im

Fernpunkt von $e$ vor. Die restlichen drei Torsalebenen müßten dann nach Satz 1 isotrop sein, durch $e$ gehen und dürften nicht zusammenfallen, was nicht möglich ist. Enthält $\Phi_{II}$, ohne daß $e$ uneigentlich ist, eine Fernerzeugende, so wäre diese stets reell und nach Satz 2 eine Torsallinie zweiter Ordnung. Die restlichen drei Torsallinien zweiter Ordnung hätten dann eigentliche Kuspidalpunkte und müßten nach Satz 1 zu getrennten isotropen Torsalebenen durch $e$ gehören, was wieder unmöglich ist. Ist schließlich die Brennlinie $e$ des parabolischen Netzes uneigentlich, so existiert nach Satz 4 keine konstant gedrallte Fläche $\Phi_{II}$.

Zusammenfassend kann gesagt werden:

**Satz 5**: *Es gibt keine reellen elliptischen Strahlflächen 4. Grades mit konstantem Drall.*

## 4.

**Flächen VII. Art**: Die rationalen Flächen $\Phi_{VII}$ sind in einem hyperbolischen oder elliptischen Strahlnetz mit den Brennstrahlen $e$ und $f$ enthalten und besitzen eine stets reelle Doppelerzeugende, die speziell eine gewöhnliche Rückkehrerzeugende sein kann. Die Brennstrahlen und die Doppelerzeugende bilden die Doppelkurve der Fläche. $\Phi_{VII}$ enthält vier stets getrennte Torsallinien erster Ordnung, falls eine Doppelerzeugende existiert bzw. zwei Torsallinien erster Ordnung, wenn eine Rückkehrerzeugende vorhanden ist. Die Kuspidalpunkte liegen gleichverteilt auf den doppelten Leitgeraden $e$ und $f$, durch die auch die Torsalebenen gehen.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $\Phi_{VII}$ eine *Doppelerzeugende* besitzt. Enthält $\Phi_{VII}$ dann keine Fernerzeugende, so müßten die Torsallinien bei konstantem Drall nach Satz 1 entweder isotrop zylindrisch oder mit einer isotropen Torsalebene behaftet sein. Im Falle isotroper zylindrischer Erzeugenden sind die Brennstrahlen $e$ und $f$ konjugiert isotrop; die Fernkurve von $\Phi_{VII}$ hat in deren Fernpunkten $E_u$ und $F_u$ Spitzen und ist von 4. Klasse. Die restlichen beiden Torsallinien erster Ordnung müßten zu konjugiert isotropen Torsalebenen durch $e$ bzw. $f$ gehören, deren isotrope Ferngeraden jedoch von den Spitzentangenten verschieden wären. Sind die Spitzentangenten nicht isotrop, so besitzt die Fernkurve noch weitere sechs isotrope Tangenten, die nach Satz 1 zu gewöhnlichen isotropen Erzeugenden der Fläche gehören müßten; da es jedoch nur vier solche geben kann, ist nach Satz 1 die Fläche nicht konstant gedrallt. Sind schließlich die Spitzentangenten selbst isotrop, so gibt es durch $E_u$ und $F_u$ sonst keine isotrope Gerade und die

beiden restlichen Torsallinien erster Ordnung könnten daher im Gegensatz zu Satz 1 keine isotropen Torsalebenen besitzen. Eine $\Phi_{VII}$ konstanten Dralls mit einer Doppelerzeugenden und ohne Fernerzeugenden besitzt somit notwendig vier Torsallinien erster Ordnung in den vier isotropen Ebenen durch $e$ und $f$.

Längs der Doppelerzeugenden, die sicher eigentlich ist, solange $\Phi_{VII}$ keine Fernerzeugenden besitzt und die wir als $x$-Achse des Koordinatensystems wählen, existieren zwei verschiedene Berührkorrelationen, in denen den getrennten Schnittpunkten der Doppelerzeugenden mit $e$ und $f$ jeweils dieselben Tangentialebenen zugewiesen werden. Ist die Doppelerzeugende zunächst zu keinem Netzbrennstrahl parallel, so sollen diese beiden Schnittpunkte die Koordinaten $E(1:\varepsilon:0:0)$ bzw. $F(1:-\varepsilon:0:0)$ erhalten, wobei $\varepsilon = 1$ im Falle eines hyperbolischen Netzes und $\varepsilon = i$ im Falle eines elliptischen Netzes zu setzen ist. Dreht man das Koordinatensystem so um die Doppelerzeugende, daß die Fernpunkte der Netzbrennstrahlen die Koordinaten $E_u(0:a:1:\varepsilon b)$ bzw. $F_u(0:\bar{a}:1:-\varepsilon b)$ ($b$ reell $\neq 0$, $a$ und $\bar{a}$ reell für hyperbolisches Netz und konjugiert komplex für elliptisches Netz) erhalten und bezeichnet man die Böschung der Ebenen des Büschels um die $x$-Achse gegen die Ebene $z = 0$ mit $\lambda$, so lauten die Gleichungen der beiden Berührkorrelationen längs der Doppelerzeugenden, die beide denselben Drall $d$ liefern müssen:

$$x\lambda\sqrt{b(1+db)} \pm xb\sqrt{\varepsilon^2 b - d} \mp \lambda\sqrt{\varepsilon^2 b - d} - \varepsilon^2 b\sqrt{b(1+db)} = 0; \qquad (12)$$

alle Wurzeln sind dabei positiv zu nehmen. Der Ebene $\lambda = 0$ speziell werden in den beiden Korrelationen zwei zum Ursprung symmetrische, verschiedene Punkte mit den Koordinaten

$$x_{1,2} \equiv \pm\xi = \pm\varepsilon^2\sqrt{\frac{b(1+db)}{\varepsilon^2 b - d}} \qquad (\xi \neq 0) \qquad (13)$$

zugewiesen. Bisher wurde der Fall ausgeschlossen, daß ein Netzbrennstrahl zur Doppelerzeugenden parallel ist; dann ist das Netz hyperbolisch und die beiden Berührkorrelationen besitzen dieselbe asymptotische Ebene. Da außerdem zum Schnittpunkt der Doppelerzeugenden mit dem anderen Netzbrennstrahl in beiden Korrelationen dieselbe Tangentialebene gehört und der Drall übereinstimmen muß, sind die beiden Berühkorrelationen identisch und es liegt eine Rückkehrerzeugende vor. Das Auftreten einer Rückkehrerzeugenden wird weiter unten betrachtet.

Jede Ebene durch die Doppelerzeugende schneidet $\Phi_{VII}$ in einem irreduziblen einteiligen Kegelschnitt. Speziell die Ebene $z = 0$ enthält einen Kegelschnitt $c$ durch die Punkte $(1 : \pm \xi : 0 : 0)$, dessen Gleichung lautet

$$x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2 + 2\,E\,y - \xi^2 = 0. \tag{14}$$

Die isotropen Ebenen durch $e$ bzw. $f$ besitzen in $z = 0$ Fernpunkte, die den Gleichungen

$$x^2(1 + \varepsilon^2 b^2) + y^2(a^2 + \varepsilon^2 b^2) - 2\,a\,x\,y = 0 \tag{15}$$

bzw.

$$x^2(1 + \varepsilon^2 b^2) + y^2(\bar{a}^2 + \varepsilon^2 b^2) - 2\,\bar{a}\,x\,y = 0 \tag{16}$$

genügen. Da diese isotropen Ebenen die Torsalebenen einer konstant gedrallten $\Phi_{VII}$ wären, müßten sie den Kegelschnitt $c$ berühren. Die Fernpunkte der Tangenten aus $E$ bzw. $F$ an $c$ erfüllen die Gleichungen

$$x^2\,\xi^2 + 2\,x\,y(B\,\xi^2 + \varepsilon\,E) + y^2[(E + \varepsilon\,B)^2 - C(\varepsilon^2 - \xi^2)] = 0 \tag{17}$$

bzw.

$$x^2\,\xi^2 + 2\,x\,y(B\,\xi^2 - \varepsilon\,E) + y^2[(E - \varepsilon\,B)^2 - C(\varepsilon^2 - \xi^2)] = 0 \tag{18}$$

und diese Fernpunkte müßten nach Obigem mit (15) bzw. (16) identisch sein. Dies liefert für die Koeffizienten von $c$

$$2\,B = -(a + \bar{a}) : (1 + \varepsilon^2 b^2),\quad 2\,E = \xi^2(\bar{a} - a) : \varepsilon(1 + \varepsilon^2 b^2), \tag{19}$$

$$C = \frac{\xi^2}{\varepsilon^2 - \xi^2}\left[\left(\frac{E + \varepsilon\,B}{\xi}\right)^2 - \frac{a^2 + \varepsilon^2 b^2}{1 + \varepsilon^2 b^2}\right] = \frac{\xi^2}{\varepsilon^2 - \xi^2}\left[\left(\frac{E - \varepsilon\,B}{\xi}\right)^2 - \frac{\bar{a}^2 + \varepsilon^2 b^2}{1 + \varepsilon^2 b^2}\right],$$

woraus folgt

$$a^2 - \bar{a}^2 = 0. \tag{20}$$

Im Falle $a = \bar{a}$ ($a$ reell) ist nach (15) bzw. (16) das Netz hyperbolisch ($\varepsilon = 1$) und man erhält für $c$ eine Parameterdarstellung in der Form

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 + t^2 : \xi + 2\,B\,\sigma\,t - \xi\,t^2 : -2\,\sigma\,t : 0, \tag{21}$$

wobei

$$\sigma = \frac{1 + b^2}{b}\sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{1 + a^2 + b^2}} \tag{22}$$

gilt. $\Phi_{VII}$ ist durch diesen Kegelschnitt $c$ und die beiden doppelten Leitgeraden $e$ und $f$ festgelegt und besitzt nach (21) die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} p_1 : \ldots : p_6 = {} & \xi^2 - 1 + 2\sigma\xi B(1-b^2)t - 2[\xi^2 + 1 + 2\sigma^2 b^2 B^2]t^2 - \\ & - 2\sigma\xi B(1-b^2)t^3 + (\xi^2 - 1)t^4 : \\ & : -2\sigma\xi t + 4\sigma^2 B b^2 t^2 + 2\sigma\xi t^3 : \\ & : 2b\sigma t + 2b\sigma t^3 : \\ & : -4\sigma^2 b t^2 : \\ & : -2\sigma\xi b t - 4\sigma^2 B b t^2 + 2\sigma\xi b t^3 : \\ & : -2\sigma t - 2\sigma t^3. \end{aligned} \tag{23}$$

Berechnet man den Drall dieser Fläche nach (3), so erhält man den Quotienten zweier Polynome 12. Grades in $t$. Dieser Quotient ist, wie eine längere Rechnung lehrt, für reelles $a$ und $b$ niemals von $t$ unabhängig, d. h. es gibt keine konstant gedrallte Fläche dieser Art.

Nach (20) ist noch der Fall $a = -\bar{a} \equiv i\alpha$ ($\alpha$ reell) zu diskutieren. Nach (15) bzw. (16) ist das Netz elliptisch ($\varepsilon = i$), $c$ erhält die Parameterdarstellung

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 - 2Et + \sigma t^2 : \xi - \sigma\xi t^2 : -2\xi^2 t : 0, \tag{24}$$

wobei

$$\sigma = -\frac{b^2\xi^4(1-\alpha^2-b^2)}{(1+\xi^2)(1-b^2)^2} \tag{25}$$

gilt und die Fläche besitzt die Darstellung

$$\begin{aligned} p_1 : \ldots : p_6 = {} & \xi^2 + 1 - 2(\alpha\xi^2 + 2E)t + 2(2\alpha E\xi^2 + 2E^2 + \\ & + \sigma - \sigma\xi^2)t^2 - 2\sigma(\alpha\xi^2 + 2E)t^3 + \sigma^2(\xi^2+1)t^4 : \\ & : -2\xi^3 t + 2\sigma\xi^3 t^3 : \\ & : -2b\xi^2 t + 4bE\xi^2 t^2 + 2b\sigma\xi^2 t^3 : \\ & : 4b\xi^4 t^2 : \\ & : 2b\xi^3 t - 2b\sigma\xi^3 t^3 : \\ & : 2\xi^2 t - 4\xi^2(\alpha\xi^2 + E)t^2 + 2\sigma\xi^2 t^3. \end{aligned} \tag{26}$$

Der nach (3) berechnete Drall dieser Fläche kann für reelles $\alpha$ und $b$ niemals von $t$ unabhängig sein, so daß auch diese Flächen nicht konstant gedrallt sind.

Nun müssen noch jene Formen der Flächen $\Phi_{\text{VII}}$ mit einer Doppelerzeugenden untersucht werden, bei denen eine Fernerzeugende existiert. Zunächst werde der Fall betrachtet, daß die Doppelerzeugende uneigentlich ist, was durch Satz 2 noch nicht erledigt ist. Die Fernebene enthält dann außer der Doppelerzeugenden noch einen einteiligen Kegelschnitt $c$, der nicht durch $E_u$ bzw. $F_u$ geht. Er schneidet den

absoluten Kegelschnitt in vier Punkten, die paarweise konjugiert komplex sind und Fernpunkte von nicht zylindrischen isotropen Erzeugenden darstellen. Nach Satz 1 müßten sämtliche dieser vier Punkte Berührungspunkte mindestens erster Ordnung zwischen den beiden Fernkegelschnitten sein, d. h. daß der Kegelschnitt $c$ den absoluten Kegelschnitt doppelt berührt. Diese beiden Kegelschnitte besitzen daher nur zwei getrennte gemeinsame Tangenten, so daß unmöglich alle vier Torsallinien erster Ordnung mit isotropen Torsalebenen versehen sein können; nach Satz 1 sind diese Flächen daher nicht konstant gedrallt. Enthält $\Phi_{\text{VII}}$ schließlich eine von der Doppelerzeugenden verschiedene Fernerzeugende, so müßten nach Satz 2 ein Netzträger uneigentlich sein; nach Satz 3 gibt es dann keine konstant gedrallte Fläche 4. Grades.

Besitzt nun $\Phi_{\text{VII}}$ eine *Rückkehrerzeugende*, so gibt es zwei Torsallinien erster Ordnung, die nach Satz 1 isotrop zylindrisch oder mit einer isotropen Torsalebene behaftet sein müßten. In beiden Fällen sind die Doppelgeraden $e$ und $f$ konjugiert komplex und das Netz daher elliptisch ($\varepsilon = i$). Längs der Rückkehrerzeugenden, die wir zunächst eigentlich voraussetzen, inzidieren die beiden Berührkorrelationen und das ist nach (12) und (13) etwa für $d = -1 : b$, $\xi = 0$ der Fall. Die andere Möglichkeit $d = -b$, $\xi = \infty$ liefert nichts wesentlich anderes; es sind nur die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ vertauscht. Bei diesen Überlegungen ist allerdings vorausgesetzt, daß kein Netzbrennstrahl zur Rückkehrerzeugenden parallel ist; wäre das der Fall, so hätte dieser Brennstrahl einen reellen Fernpunkt und das Netz wäre hyperbolisch, im Widerspruch zu oben.

Jede Ebene durch die Rückkehrerzeugende enthält außerdem einen einteiligen irreduziblen Kegelschnitt, der die Rückkehrerzeugende berührt. Speziell der Kegelschnitt $c$ in der Ebene $z = 0$ berührt die Rückkehrerzeugende im Ursprung und besitzt eine Parameterdarstellung der Form

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 + \sigma t^2 : t + \lambda t^2 : \mu t^2 : 0 \quad (\sigma, \lambda, \mu \text{ reell}). \tag{27}$$

Setzt man $a = \alpha + i\beta$, so muß im Falle isotroper Torsalebenen gelten

$$\begin{aligned} &2b^2\lambda(4\sigma + 1) + (\lambda - \alpha\mu)(4\sigma + 4\beta\mu + 1) = 0 \\ &16b^2\mu^2 + 16b^2\lambda^2 - b^2(4\sigma + 1)^2 - 16(\lambda - \alpha\mu)^2 + (4\sigma + 4\beta\mu + 1)^2 = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

bzw. für isotrope zylindrische Erzeugenden

$$\lambda = \alpha\,\mu,\ \sigma = -1:4,\ a^2 = \bar{a}^2 = b^2 - 1. \tag{29}$$

Die durch $c$ und die beiden Doppelgeraden $e$ und $f$ bestimmte Fläche hat dann nach (27) die Darstellung

$$\begin{aligned} p_1 : \ldots : p_6 = {} & 1 + (\beta\,\mu + 2\,\sigma + 1)\,t^2 + (2\,\lambda - \alpha\,\mu)\,t^3 + \\ & + (\beta\,\sigma\,\mu + \sigma^2 + \lambda^2 - \alpha\,\mu\,\lambda)\,t^4 : \\ & : \mu\,t^3 + \mu(\lambda - \alpha\,\mu)\,t^4 : \\ & : b\,\mu\,t^2 + b\,\mu\,\sigma\,t^4 : \\ & : b\,\mu^2\,t^4 : \\ & : -b\,\mu\,t^3 - b\,\lambda\,\mu\,t^4 : \\ & : -\mu\,t^2 - \mu(\beta\,\mu + \sigma)\,t^4. \end{aligned} \tag{30}$$

Für ihren Drall errechnet man nach (3) den Quotienten zweier Polynome 12. Grades in $t$. Unter Verwendung von (28) und (29) ergibt sich nach längerer Rechnung, daß dieser Quotient für eine reelle nicht ausgeartete Fläche niemals unabhängig von $t$ sein kann.

Die (gewöhnliche) Rückkehrerzeugende einer $\Phi_{\text{VII}}$ kann auch uneigentlich sein; bei einer reellen Fläche ist sie stets reell und daher hat nach Satz 2 eine solche Fläche niemals konstanten Drall. Liegt schließlich eine von der Rückkehrerzeugenden verschiedene Erzeugende der Fläche in der Fernebene, so ergeben die Sätze 2 und 3, daß eine Fläche nicht konstanten Dralls vorliegen muß.

Damit sind alle Fälle reeller Flächen VII. Art untersucht und es hat sich ergeben:

**Satz 6**: *Es gibt keine reelle Strahlfläche 4. Grades VII. Art mit konstantem Drall.*

## 5.

**Flächen VIII. Art**: Fallen die beiden Leitlinien einer Fläche VII. Art zusammen, so entsteht eine Strahlfläche VIII. Art $\Phi_{\text{VIII}}$. Diese besitzt zwei Torsallinien zweiter Ordnung und eine Doppelerzeugende bzw. eine Torsallinie zweiter Ordnung und eine gewöhnliche Rückkehrerzeugende. Hat $\Phi_{\text{VIII}}$ im ersten Fall keine Fernerzeugende und keine zylindrische Erzeugende, so müßten die beiden Torsallinien zweiter Ordnung bei konstantem Drall nach Satz 1 zu den isotropen Ebenen durch den reellen Brennstrahl $e$ jenes parabolischen Netzes gehören, in dem die Fläche liegt. Der Rang der Fläche ist dann sechs und ihre Fernkurve besitzt daher zwölf isotrope Tangenten als Ferngeraden isotroper asymptotischer Ebenen, von denen insbesondere zwei als

Torsalebenen zu den beiden Torsallinien gehörten. Da $\Phi_{VIII}$ acht isotrope Erzeugende enthält, bleiben isotrope asymptotische Ebenen über, die weder eine isotrope noch eine torsale Erzeugende enthalten, was nach Satz 1 unzulässig ist. Besitzt $\Phi_{VIII}$ keine Fernerzeugende aber eine zylindrische Erzeugende, so ist deren Kuspidalpunkt der reelle Fernpunkt von $e$ und nach Satz 1 läge daher eine zylindrische Erzeugende zweiter Ordnung vor; die verbleibende Torsallinie zweiter Ordnung wäre dann nicht zylindrisch und hätte eine reelle Torsalebene, was Satz 1 verbietet. Enthält $\Phi_{VIII}$ schließlich eine von der Doppelerzeugenden verschiedene Fernerzeugende und ist $e$ eigentlich, so müßte die Fernerzeugende nach Satz 2 eine Torsallinie zweiter Ordnung und somit reell sein; die zweite Torsallinie zweiter Ordnung könnte dann nicht zylindrisch sein und müßte im Gegensatz zu Satz 1 eine reelle Torsalebene besitzen. Daß $e$ selbst uneigentlich ist, erscheint nach Satz 4 ausgeschlossen.

Nun bleibt noch der Fall, daß die Doppelerzeugende uneigentlich ist. Wir legen dann die Leitgerade $e$ in die $x$-Achse des Koordinatensystems und die reelle Doppelerzeugende in die Ferngerade der Ebene $z = 0$. Die Fernebene enthält dann außer der Doppelgeraden noch einen einteiligen irreduziblen Kegelschnitt $c$, der bei konstantem Drall der Fläche den absoluten Kegelschnitt doppelt berühren müßte. Die beiden isotropen Tangenten von $c$ müßten die Ferngeraden der beiden isotropen Torsalebenen abgeben und durch den Fernpunkt $E_u$ von $e$ gehen. $c$ besitzt eine Parameterdarstellung der Form

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 1 + t^2 : \alpha(t^2 - 1) : 2\,\alpha\, t \qquad (\alpha \text{ reell}). \tag{31}$$

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in jenen Punkt von $e$, dem die Ebene $y = 0$ entspricht, so lautet die Parameterdarstellung der durch $c$ und $e$ bestimmten Fläche nach zweckmäßiger Wahl der Einheitsstrecke

$$\begin{aligned} p_1 : \ldots : p_6 = 2\,t(1 + t^2) : 2\,\alpha\, t(t^2 - 1) : 4\,\alpha\, t^2 : \\ : 0 : -2\,\alpha\, t(t^2 - 1) : \alpha(t^2 - 1)^2 \end{aligned} \tag{32}$$

und nach (3) erhält man für ihren Drall

$$d = -\frac{1}{4}\,(t + \frac{1}{t})^2; \tag{33}$$

dieser Ausdruck kann niemals von $t$ unabhängig sein.

Besitzt nun $\Phi_{VIII}$ eine *Rückkehrerzeugende* und somit nur eine Torsallinie zweiter Ordnung, so liegt diese stets in einer reellen Torsalebene. Sie könnte daher nach Satz 1 und 2 entweder eine zylindrische Erzeugende zweiter Ordnung oder eine reelle Ferntorsallinie zweiter Ordnung sein. Beide Fälle sind denkbar und bedürfen einer genaueren analytischen Untersuchung. Ist schließlich die Rückkehrerzeugende oder die Leitlinie $e$ uneigentlich, so existiert nach den Sätzen 2 bzw. 4 keine konstant gedrallte Strahlfläche dieser Art.

Um die fehlenden beiden Fälle zu diskutieren, legen wir die stets reelle Rückkehrerzeugende in die $x$-Achse. Die eigentliche Brennlinie $e$ des parabolischen Netzes besitzt den einzigen Kuspidalpunkt der Fläche als Fernpunkt und ist daher zur Rückkehrerzeugenden keinesfalls parallel. Wir wählen die $y$- und $z$-Achse so, daß $e$ die Gleichungen

$$x + a z = 0, \; y = 0 \tag{34}$$

annimmt. Jede Ebene durch die Rückkehrerzeugende schneidet die Fläche nach einem einteiligen irreduziblen Kegelschnitt, der die Rückkehrerzeugende berührt. Speziell der in der Ebene $z = 0$ liegende Flächenkegelschnitt $c$ soll die Rückkehrerzeugende im Punkt $(a : 1 : 0 : 0)$ berühren. Durch jeden Punkt von $e$ gehen zwei Erzeugenden, die in der diesem Punkt im parabolischen Netz um $e$ zugewiesenen Ebene liegen; speziell durch den Fernpunkt $E_u$ von $e$ geht die Torsallinie zweiter Ordnung, deren Torsalebene $c$ berührt. Diese Torsallinie ist zylindrisch oder eine Ferngerade.

Wir schließen zunächst den Fall aus, daß $c$ die $y$-Achse berührt. Der funktionelle Zusammenhang zwischen den Höhenkoten $z$ der Punkte auf $e$ und einem geeigneten Parameter $t$ auf $c$ kann dann nach Wahl einer zweckmäßigen Einheitsstrecke in der Form

$$z = \mp t^2 \tag{35}$$

geschrieben werden, wobei das obere Vorzeichen zu nehmen ist, falls $c$ die $y$-Achse nicht reell schneidet. Der Kegelschnitt $c$ hat die Darstellung

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = a + a_1 t + a_2 t^2 : 1 \pm t^2 : \pm b t^2 : 0 \tag{36}$$

und damit die Fläche $\Phi_{VIII}$

$$\begin{aligned} p_1 : \ldots : p_6 = {} & 1 \pm (1 - a a) t^2 \mp a a_1 t^3 \mp a a_2 t^4 : \mp b t^2 : \\ & : \pm a t^2 \pm a_1 t^3 \pm a_2 t^4 : \\ & : - b t^4 : \mp t^2 - t^4 : - a b t^4. \end{aligned} \tag{37}$$

Berechnet man nach (3) den Drall dieser Fläche, so erhält man den Quotienten zweier Polynome 10. Grades und dieser Quotient ist nur dann unabhängig von $t$, wenn gilt:

$$a = 0, \quad a_1 = \sqrt{8:27}, \quad a_2 = 0, \quad \alpha = 0, \quad b = 1:\sqrt{3}. \tag{38}$$

Die zugehörige Fläche $\Phi^*_{\text{VIII}}$

$$p_1 : \ldots : p_6 = 3\sqrt{3}(1+t^2) : -3t^2 : \sqrt{8}\,t^3 : -3t^4 : -3\sqrt{3}(t^2+t^4) : 0 \tag{39}$$

besitzt den konstanten Drall $d = \sqrt{3}$ und wird im letzten Abschnitt ausführlich diskutiert.

Der noch offene Fall, daß $c$ die $y$-Achse berührt, liefert nach entsprechenden Normierungen die Darstellung

$$p_1 : \ldots : p_6 = 1 + \alpha a t^2 + \alpha a_1 t^3 + \alpha a_2 t^4 : b t^2 : -a t^2 - a_1 t^3 - a_2 t^4 : \\ : -b t^4 : t^2 : -\alpha b t^4. \tag{40}$$

Für eine reelle irreduzible Fläche dieser Art ist der nach (3) berechnete Drall niemals konstant.

Wir erkennen daraus den

**Satz 7**: *Bis auf Ähnlichkeiten existiert eine einzige reelle Strahlfläche 4. Grades VIII. Art mit konstantem Drall.*

## 6.

**Flächen X. Art**: Die rationalen Strahlflächen $\Phi_X$ sind durch eine (1,3)-Korrespondenz zwischen den stets reellen Brennstrahlen $e$ und $f$ bestimmt. $e$ ist eine dreifache Leitgerade von $\Phi_X$, auf der sämtliche Kuspidalpunkte der vier Torsallinien liegen, $f$ eine einfache Leitgerade, durch die die Torsalebenen gehen. Die vier Torsallinien können sämtlich von erster Ordnung sein oder paarweise zusammenfallen und somit zu einer Torsallinie zweiter Ordnung und zwei Torsallinien erster Ordnung oder sogar zu zwei getrennten Torsallinien zweiter Ordnung führen. Besitzt $\Phi_X$ keine zylindrische und keine Fernerzeugende, so müßten bei konstantem Drall nach Satz 1 sämtliche Torsallinien zu isotropen Torsalebenen gehören. Das ist nur so möglich, daß $\Phi_X$ zwei Torsallinien zweiter Ordnung in den isotropen Ebenen durch $f$ besitzt. Die Fernkurve von $\Phi_X$ enthält den Fernpunkt der dreifachen Leitgeraden als dreifachen Punkt mit drei stets getrennten Tangenten. Sie ist von 6. Klasse und besitzt daher zwölf isotrope Tangenten, die Ferngeraden von isotropen asymptotischen Ebenen oder isotropen Torsalebenen sind.

Nach Satz 1 würden zwei für die Torsallinien und höchstens acht für die isotropen Erzeugenden verbraucht. Es blieben somit mindestens zwei isotrope asymptotische Ebenen, die weder eine isotrope noch eine torsale Erzeugende enthielten, was nach Satz 1 für Flächen konstanten Dralls unmöglich ist.

Besitzt nun $\Phi_X$ eine zylindrische Erzeugende, so ist diese reell, weil ihr Kuspidalpunkt der reelle Fernpunkt der Leitlinie $e$ ist; es läge somit eine zylindrische Erzeugende zweiter Ordnung vor. Da bei einer solchen die Torsalebene mit der asymptotischen Ebene zusammenfällt ([6], S. 102), enthält die Ferngerade dieser Ebene im Fernpunkt von $e$ vier Schnittpunkte mit der Fernkurve von $\Phi_X$; die Torsalebene geht aber auch durch die einfache Leitgerade $f$. Ihre Ferngerade schneidet daher die Fernkurve der Fläche außerdem im Fernpunkt der einfachen Leitgeraden. Die Fernkurve zerfällt somit und enthält eine Ferntorsallinie zweiter Ordnung mit eigentlicher Torsalebene. Die restlichen Torsallinien müßten nach Satz 1 Torsallinien erster Ordnung in den isotropen Ebenen durch $f$ sein. Dieser Fall muß analytisch untersucht werden. Ist schließlich eine Leitgerade uneigentlich, so können die Flächen nach Satz 3 nicht konstant gedrallt sein.

Besitzt $\Phi_X$ eine Ferntorsallinie zweiter Ordnung mit eigentlicher Torsalebene, so zerfällt die Fernkurve der Fläche in diese Torsallinie und eine irreduzible einteilige Kubik $c$. Jeder Schnittpunkt von $c$ mit dem absoluten Kegelschnitt $i$ ist Fernpunkt einer isotropen nicht zylindrischen Erzeugenden; nach Satz 1 müßte bei konstantem Drall in jedem Schnittpunkt dieser Art zumindest eine Berührung erster Ordnung zwischen $c$ und $i$ vorliegen. Da keiner dieser Punkte reell ist, muß die Kubik $c$ den absoluten Kegelschnitt $i$ in zwei Punkten $I$ und $\bar{I}$ oskulieren. $c$ besitzt im Fernpunkt der dreifachen Leitgeraden $e$ einen Doppelpunkt; dieser Doppelpunkt ist gleichzeitig Kuspidalpunkt der Ferntorsallinie. Die Fläche $\Phi_X$ ist durch $c$ und die beiden Leitgeraden $e$ und $f$ bestimmt. In jeder Ebene durch $e$ liegt genau eine Erzeugende, die durch den Schnittpunkt dieser Ebene mit der einfachen Leitgeraden $f$ und den Restschnittpunkt dieser Ebene mit $c$ geht. Speziell in der Verbindungsebene von $e$ mit der Ferntorsallinie liegt keine weitere Erzeugende von $\Phi_X$, d. h. die Ferntorsallinie muß $c$ im Doppelpunkt berühren. Da die Ferntorsallinie von zweiter Ordnung ist, geht durch den Fernpunkt der dreifachen Leitgeraden keine weitere Erzeugende und $c$ besitzt daher keine weitere Tangente im Doppelpunkt und hat eine Spitze mit der Ferntorsallinie als Spitzentangente. $c$ ist dann

von 3. Klasse und hat sechs isotrope Tangenten, die sämtlich für die doppelte Oskulation mit $i$ verbraucht sind. Die beiden Torsallinien erster Ordnung, die isotrope Torsalebenen besitzen müßten, sind also selbst isotrop und da die Torsalebenen durch die einfache Leitgerade $f$ gehen, ist der Fernpunkt von $f$ der absolute Pol der gemeinsamen Sehne von $c$ und $i$.

Wir legen das Koordinatensystem so, daß die Punkte $I$ und $\bar{I}$ in die absoluten Punkte der $xy$-Ebene fallen und außerdem die Spitze $E_u$ von $c$ auf der Ferngeraden der Ebene $x = 0$ liegt; $E_u$ habe die Koordinaten $(0:0:1:a)$, wobei $a$ reell und $\neq 0$ ist. Die Kubik $c$ ist dann zu $x = 0$ projektiv symmetrisch ([3], S. 107); wählt man als Parameter $t$ auf $c$ den Wert $x:y$ des Schnittpunktes von $z = 0$ mit dem den betreffenden Kurvenpunkt aus der Spitze $E_u$ projizierenden Strahl, so lautet die Parameterdarstellung von $c$

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 2t^3 : 3t^2 + 1 : \sqrt{3}\,(t^2 + 1). \tag{41}$$

Es gilt $a = \sqrt{3}$ und der Fernpunkt der einfachen Leitgeraden $f$ hat die Koordinaten $(0:0:0:1)$. Legt man den Ursprung des Koordinatensystems so auf $e$, daß $f$ die $x$-Achse schneidet, so lauten die Parameterdarstellungen der beiden Leitgeraden

$$e \ldots x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \mu : 0 : 1 : \sqrt{3},\ f \ldots x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : c : 0 : \lambda \quad (c \neq 0). \tag{42}$$

Daraus ergibt sich die Parameterdarstellung der Fläche zu

$$p_1 : \ldots : p_6 = 2t^4 : t + 3t^3 : \sqrt{3}(t + t^3) : c\sqrt{3}(1 + 3t^2) : \\ : c(t + 3t^3) : -c\sqrt{3}(t + 3t^3) \tag{43}$$

und nach (3) besitzt sie den Drall

$$d = -\frac{c\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right). \tag{44}$$

Dieser Wert ist niemals konstant.

**Flächen XII. Art**: Die rationalen Flächen $\Phi_{XII}$ entstehen aus jenen der X. Art, wenn die beiden Netzbrennstrahlen zusammenfallen. Diese Flächen sind daher in einem parabolischen Netz enthalten und besitzen den Brennstrahl $e$ entweder in zweifacher Weise als Torsallinie zweiter Ordnung oder als Torsallinie vierter Ordnung (*Vosssche* Flächen). Besitzt $\Phi_{XII}$ keine Fernerzeugende, so müßte die reelle Gerade $e$ bei konstantem Drall eine zylindrische Erzeugende mindestens zweiter

Ordnung sein, die beiden Kuspidalpunkte müßten zusammenfallen und es würde eine *Vosss*che Fläche mit einer zylindrischen Erzeugenden vierter Ordnung vorliegen. Diese kann durch eine Projektivität zwischen einer reellen Kurve 3. Ordnung und einer ihrer Tangenten erzeugt werden, wobei dem eigentlichen Berührungspunkt dieser Tangente in der Projektivität ihr Fernpunkt zugewiesen wird. Nach entsprechenden Normierungen besitzt diese Fläche die Darstellung

$$p_1 : \ldots : p_6 = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 + \varepsilon t^4 : t^3 : t^4 : 0 : -t^3 - a t^4 : \\ : t^2 + a t^3. \qquad (45)$$

Für ihren Drall erhält man nach (3) den Quotienten zweier Polynome 8. Grades in $t$ und der Koeffizientenvergleich liefert keine reelle $\Phi_{\text{XII}}$ konstanten Dralls, wohl aber eine *stets komplexe Fläche* mit der Darstellung

$$p_1 : \ldots : p_6 = -\frac{i}{8} + \frac{i}{2} t^2 + i t^4 : t^3 : t^4 : 0 : -t^3 - a t^4 : t^2 + a t^3, \qquad (46)$$

die den *reellen konstanten Drall* $d = -1 : 9$ besitzt.

Enthält $\Phi_{\text{XII}}$ schließlich eine Fernerzeugende, so müßte nach Satz 2 eine Torsallinie mindestens zweiter Ordnung in der Fernebene liegen, die aber mit dem Brennstrahl $e$ zusammenfällt. Nach Satz 4 gibt es keine Fläche konstanten Dralls dieser Art.

Somit gilt:

**Satz** 8: *Es gibt keine reellen Strahlflächen 4. Grades X. und XII. Art mit konstantem Drall.*

## 7.

Nach den vorhergehenden Überlegungen existiert bis auf Ähnlichkeiten eine einzige reelle Netzfläche 4. Grades mit konstantem Drall. Sie ist nach **5.** von VIII. Art; wird im Gegensatz zu **5.** die Einheitsstrecke des Raumes nicht speziell gewählt, so lautet die Parameterdarstellung der Fläche $\Phi^*_{\text{VIII}}$

$$p_1 : \ldots : p_6 = 3\sqrt{3}(1 + t^2) : -3 t^2 : \sqrt{8}\, t^3 : -\sqrt{3}\, dt^4 : -3 d(t^2 + t^4) : 0, \qquad (47)$$

wobei $d$ ihren konstanten Drall bedeutet. Man berechnet als ihre Gleichung:

$$9 (x z + \sqrt{3}\, y z - d y)^2 + 8\sqrt{3}\, y^3 (x + \sqrt{3}\, y) = 0. \qquad (48)$$

Sie ist in einem parabolischen Netz um die $z$-Achse enthalten und besitzt die $x$-Achse als Rückkehrerzeugende. Ihr Schnitt mit $z = 0$

ist außerdem eine Hyperbel $h$, deren Mittelpunkt $M$ der Ursprung ist, die die Rückkehrerzeugende zur Asymptote besitzt und einen Asymptotenwinkel von $30^0$ aufweist (s. Abb.). Projiziert man die Erzeugenden der Fläche in Richtung der Rückkehrerzeugenden auf die $yz$-Ebene

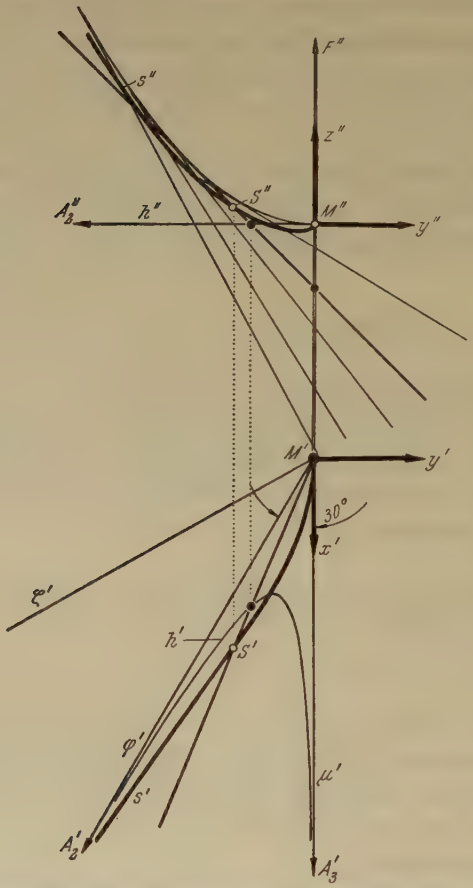


Abb. 1. Die konstant gedrallte Netzfläche 4. Grades. Die vollständige Fläche entsteht nach Spiegelung des gezeichneten Teiles an der $z$-Achse.

(s. Abb.), so entsteht als scheinbarer Umriß nach (47) die Parabel $3\sqrt{3}\,dz - 2y^2 = 0$. Die Berührkorrelation längs der $z$-Achse ist dadurch festgelegt, daß dem Mittelpunkt $M$ der Hyperbel $h$ die Verbindungsebene $\mu$ mit der Rückkehrerzeugenden zugewiesen wird, dem Fernpunkt $F$ die Verbindungsebene $\varphi$ mit der zweiten Asymptote von $h$

und dem Punkt $z = \frac{\sqrt{3}}{2} d$ die Ebene $\zeta$, die zu $\mu$ bezüglich $\varphi$ symmetrisch liegt. In der Ebene $\zeta$ liegen isotrope Erzeugenden von $\Phi^*_{\text{VIII}}$, deren Schnittpunkte mit $z = 0$ zusammen mit den Asymptoten die Hyperbel $h$ festlegen. Die *Fernkurve* von $\Phi^*_{\text{VIII}}$ zerfällt in eine Ferntorsallinie zweiter Ordnung, die $F$ mit dem Fernpunkt der von der Rückkehrerzeugenden verschiedenen Asymptote von $h$ verbindet und eine rationale Kubik

$$9\,z^2(x + \sqrt{3}\,y) + 8\sqrt{3}\,y^3 = 0 \tag{49}$$

mit einer Spitze im Fernpunkt der Rückkehrerzeugenden, die den absoluten Kegelschnitt in den beiden absoluten Punkten der Ebene $\zeta$ oskuliert. Die *Striktionslinie* $s$ von $\Phi^*_{\text{VIII}}$ hat die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \sqrt{6}(3 + 2t^2) &: 6\sqrt{3}\,d(t + t^3) : \\ &: -6\,d\,t^3 : \sqrt{2}\,d(-3t^2 + 2t^4); \end{aligned} \tag{50}$$

es ist dies eine *Raumkurve 4. Ordnung 2. Art*, deren Trisekanten jene Strahlschar auf dem hyperbolischen Paraboloid $\Psi$

$$(\sqrt{3}\,x + y)(\sqrt{3}\,x + 5\,y) + 6\sqrt{3}\,d\,z = 0 \tag{51}$$

erfüllen, die die Ferngerade der Ebene $\varphi$ enthält. $s$ entsteht als Schnitt von $\Psi$ mit dem geraden Konoid 3. Grades

$$z(\sqrt{3}\,x + y)(x + \sqrt{3}\,y) = d\,y(\sqrt{3}\,x + 5\,y) \tag{52}$$

um die $z$-Achse, das mit $\Psi$ eine Scheitelerzeugende und eine Ferngerade gemeinsam hat. $s$ geht durch $M$, oskuliert $\mu$ und berührt dort die Rückkehrerzeugende und geht ferner durch $F$, oskuliert $\varphi$ und berührt dort die Ferntorsallinie. Die vollständige Striktionslinie von $\Phi^*_{\text{VIII}}$ ist, da $\Phi^*_{\text{VIII}}$ den Rang 5 besitzt, von 10. Ordnung und besteht aus der „eigentlichen Striktionslinie" $s$, der doppelt zu zählenden Ferntorsallinie und aus den doppelt zu zählenden isotropen Erzeugenden in der Ebene $\zeta$ (vgl. [10], S. 580, [11], S. 261 und [6], S. 154). Nach (47) ümhüllen die Zentralebenen von $\Phi^*_{\text{VIII}}$ eine Böschungsfläche mit einer kubischen Parabel als Gratlinie; der Richtkegel dieser *Zentraltorse* ist ein Drehkegel vom Öffnungswinkel $\pi/3$. Variiert $d$, so erhält man $\infty^1$ Flächen $\Phi^*_{\text{VIII}}$, die durch zentrische Streckung aus $M$ ineinander übergehen; jede dieser Flächen ist zur $z$-Achse axial symmetrisch.

Nach Untersuchungen von *K. Strubecker* [7] (s. auch [6], S. 163f) kann $\Phi^*_{\text{VIII}}$ als Bahnfläche einer ihrer Erzeugenden bei einer gewissen eingliedrigen Kollineationsgruppe erzeugt werden. Das Fixtetraeder dieser Kollineationen besteht dabei aus dem Mittelpunkt $M$ (1 : 0 : 0 : 0)

der Hyperbel $h$, den Fernpunkten $A_2(0:-\sqrt{3}:1:0)$ und $A_3(0:1:0:0)$ von $h$ und dem Fernpunkt $F(0:0:0:1)$ der doppelten Leitgeraden. Bei dieser Kollineationsgruppe bleiben die Quadriken $\Lambda$

$$z(x+\sqrt{3}\,y)+\lambda\,y=0 \tag{53}$$

eines Büschels durch ein gemeinsames Erzeugendenvierseit einzeln fest. Zeichnet man eines der hyperbolischen Paraboloide $\Lambda$ als Maßfläche einer nichteuklidischen Maßbestimmung aus, so stellt die obige Kollineationsgruppe eine gewisse *nichteuklidische Schraubung* dar und $\Phi^*_{\text{VIII}}$ ist eine *nichteuklidische Strahlschraubfläche* von jener Art, deren Erzeugenden eine Seite des Fixtetraeders schneiden. *Strubecker* nennt solche Flächen 4. Grades „*Mohrmannsche Flächen*"; *H. Mohrmann* [8] und *H. Neudorfer* [9] haben insbesondere die Schmieglinien solcher Flächen untersucht. Die Schraublinien sind dabei Raumkurven 3. Ordnung mit einem gemeinsamen Schmiegtetraeder, das durch folgende Stücke bestimmt ist: der Kuspidalpunkt $F$ mit der Torsalerzeugenden und der Torsalebene $\varphi$, der Fernpunkt $A_3$ der Rückkehrerzeugenden mit der Rückkehrerzeugenden und der Ebene $z=0$. Eine dieser Bahnkubiken liegt auf der Fläche $\Phi^*_{\text{VIII}}$ und ist dort *Schmieglinie*. $\Phi^*_{\text{VIII}}$ ist nun nicht nur nichteuklidische Strahlschraubfläche einer einzigen nichteuklidischen Schraubung, sondern sogar von $\infty^1$ solchen Schraubungen, da der Fixpunkt $A_3$ in einem beliebigen Punkt $\hat{A}_3$ auf der Rückkehrerzeugenden gewählt werden kann, wobei an Stelle der Ebene $z=0$ dann die Ebene jenes Flächenkegelschnittes von $\Phi^*_{\text{VIII}}$ als Fixtetraederebene zu nehmen ist, der die Rückkehrerzeugende in $\hat{A}_3$ berührt. Insgesamt gestattet somit $\Phi^*_{\text{VIII}}$ eine *zweigliedrige Gruppe* projektiver Automorphien, die unter Verwendung zweier Parameter $\omega$ und $\tau$ lauten

$$\begin{aligned}\bar{x}_0:\bar{x}_1:\bar{x}_2:\bar{x}_3 = \tau^2 x_0+\tau^2\omega\,x_1+\tau^2\omega\sqrt{3}\,x_2:\tau^3 x_1+\tau(\tau^2-1)\sqrt{3}\,x_2:\\ :\tau\,x_2:d\,\omega\,x_2+x_3.\end{aligned} \tag{54}$$

Zu jeder dieser $\infty^1$ nichteuklidischen Schraubungen gibt es eine auf $\Phi^*_{\text{VIII}}$ gelegene Bahnkurve, die dort Schmieglinie ist. Alle Schmieglinien von $\Phi^*_{\text{VIII}}$ sind somit Kurven 3. Ordnung; sie hyperoskulieren sich im Kuspidalpunkt $F$ und berühren alle die Rückkehrerzeugende. Projiziert man sie aus $F$ auf die Ebene $z=0$, so erhält man ein quadratisches Kegelschnittsystem; alle diese Kegelschnitte oskulieren sich im Schnittpunkt $A_2$ der Torsallinie mit der Hyperbel $h$ (vgl. [9], S. 211).

Die Fläche ist eindeutig bestimmt, wenn man die Berührkorrelation längs ihrer doppelten Leitgeraden und ihre Fernkurve kennt. Diese

Fernkurve besteht aus der durch die Berührkorrelation bereits festgelegten Ferntorsallinie und einer gespitzten Kubik, die den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert und im Fernpunkt der Leitgeraden die Ferntorsallinie als Wendetangente besitzt. Eine solche Kubik ist durch weitere Vorgabe ihrer (auf zwei Arten wählbaren) Spitze eindeutig festgelegt (vgl. [3], S. 108). Das Gesamtergebnis unserer Untersuchungen kann daher wie folgt zusammengefaßt werden:

**Satz 9**: *Die einzige konstant gedrallte reelle Netzfläche 4. Grades ist jene den absoluten Kegelschnitt doppelt oskulierende Mohrmannsche Fläche, deren Torsallinie uneigentlich ist, die eine eigentliche Torsalebene besitzt und deren eigentliche Rückkehrerzeugende die Torsalebene unter einem Winkel von* $30^0$ *so durchsetzt, daß deren Normale in der Torsalebene durch den Kuspidalpunkt der Fläche geht.*

Dadurch ist die Fläche bis auf Ähnlichkeiten bestimmt.

## Literatur

[1] *H. Brauner*, Über Strahlenflächen von konstantem Drall. Mh. Math. **63**, 101—111 (1959).

[2] *H. Brauner*, Eine Verallgemeinerung des Problems der Cesàrokurven. Math. Annalen **138**, 27—41 (1959).

[3] *H. Brauner*, Die Strahlfläche 3. Grades mit konstantem Drall. Mh. Math. **64**, 101—109 (1960).

[4] *H. Brauner*, Erweiterung des Begriffs Drall auf *Monge*sche Flächen. Anz. Akad. Wiss. Wien (im Druck).

[5] *J. Krames*, Die Regelflächen dritter Ordnung, deren unendlich ferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **133**, 65—90 (1924).

[6] *E. Müller-J. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie III. Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Deuticke (1931).

[7] *K. Strubecker*, Über nichteuklidische Schraubungen. Mh. Math. **38**, 63—84 (1931).

[8] *H. Mohrmann*, Über die Haupttangentenkurven auf Netzflächen. Math. Annalen **73**, 571—595 (1913).

[9] *H. Neudorfer*, Konstruktion der Haupttangentenkurven auf Netzflächen. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **134**, 205—214 (1925).

[10] *J. Krames*, Die Regelfläche dritter Ordnung, deren Striktionslinie eine Ellipse ist. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **127**, 563—584 (1918).

[11] *J. Krames*, Über das Zerfallen der Striktionslinie von Regelflächen. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **135**, 227—269 (1926).

# Abschätzungen für die Anzahl der konvexen Körper, die einen konvexen Körper berühren

Von

**Helmut Groemer,** Corvallis, Ore. USA

*(Eingegangen am 12. Mai 1960)*

Im $n$-dimensionalen Euklidischen Raum $R_n$ sei ein konvexer, abgeschlossener Körper $K$ gegeben. Es bedeute $m = m(K)$ die größte Zahl, die die Eigenschaft hat, daß es $m$ zu $K$ translationsgleiche einander nicht überlappende Körper gibt, die $K$ berühren. Setzt man voraus, daß $K$ symmetrisch ist und daß die Lagerung aller vorhandenen konvexen Körper gitterförmig sein soll, so folgt aus einem bekannten Satz von Minkowski [1] über die Anzahl der Gitterpunkte an der Oberfläche eines konvexen Körpers, daß $K$ von höchstens $3^n - 1$ Exemplaren berührt werden kann. Mittels eines äußerst einfachen Beweisverfahrens läßt sich nun zeigen, daß die Voraussetzungen der Symmetrie von $K$ und der Gitterförmigkeit der Lagerung nicht nötig sind. Es gilt also:

*Satz* 1: Für alle $K$ ist

$$m \leqslant 3^n - 1. \tag{1}$$

Man sieht sehr leicht, daß für ein $n$-dimensionales Parallelepiped in (1) das Gleichheitszeichen gilt. Die Frage, ob dies der einzige Fall ist, ob also die Parallelepipede die einzigen konvexen Körper sind, an die sich $3^n - 1$ translationsgleiche Exemplare anlegen lassen, wird im nächsten Satz beantwortet.

*Satz* 2: Ist $K$ kein Parallelepiped, so gilt

$$m < 3^n - 1.$$

Insbesondere folgt daraus, daß man in dem erwähnten Minkowskischen Satz, falls $K$ kein Parallelepiped ist, die Zahl $3^n - 1$ durch $3^n - 3$ ersetzen kann (die ungerade Zahl $3^n - 2$ ist aus Symmetriegründen unmöglich).

Die Sätze 1 und 2 können noch in einer etwas anderen Form ausgesprochen werden, wenn $K$ symmetrisch ist. Durch $K$ wird dann

im $R_n$ eine Minkowskische Metrik definiert. Bezeichnet man mit $d(P, Q)$ den durch diese Metrik gegebenen Abstand zweier Punkte $P$, $Q$, so besagen die beiden Sätze, daß auf der Oberfläche von $K$, abgesehen von dem durch Satz 2 gegebenen Ausnahmefall, höchstens $3^n - 2$ Punkte Platz finden, die voneinander einen (Minkowskischen) Abstand $\geqslant 1$ haben. Es liegt nahe, die analoge Frage für den Fall zu untersuchen, daß der Minimalabstand nicht 1 sondern eine beliebig vorgegebene positive Zahl ist. In dieser Hinsicht gilt der folgende

*Satz* 3: Ist $p$ die Maximalzahl der Punkte, die sich auf der Oberfläche von $K$ mit einem Minimalabstand $\geqslant a$ lagern lassen (d. h. $d(P, Q) \geqslant a$ für je zwei solche Punkte $P, Q$), so gilt

$$p \leqslant \left(\frac{2}{a} + 1\right)^n - \left(\frac{2}{a} - 1\right)^n. \tag{2}$$

Das Gleichheitszeichen steht dabei genau dann, wenn $K$ ein Parallelepiped ist und entweder

$$n = 1,\ a \leqslant 2$$

oder

$$n > 1,\ a \leqslant 2,\ \frac{2}{a} = g$$

mit einer ganzen Zahl $g$ gilt.

Der Beweis der angeführten Sätze stützt sich auf die folgenden drei Hilfssätze. Die Hilfssätze 1 und 3 beziehen sich auf den durch Zentralsymmetrisierung aus dem konvexen Körper $K$ hervorgehenden symmetrischen konvexen Körper $K^*$ (vgl. Bonnesen-Fenchel [2]). $K^*$ ist also der konvexe Körper, der die Stützfunktion $\frac{1}{2}(H(u) + H(-u))$ hat. $u$ ist dabei ein Einheitsvektor und $H(u)$ die Stützfunktion von $K$.

*Hilfssatz* 1: Sind $m$ zu $K$ translationsgleiche konvexe Körper $K_i$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ gegeben, die einander nicht überlappen und $K$ berühren, so überlappen auch die Körper $K_i^+$, die aus $K^*$ durch diejenigen Translationen hervorgehen, die $K$ in $K_i$ überführen, einander nicht und berühren $K^*$.

*Beweis*: Es sei $K = K_0$, $K^* = K_0^+$ gesetzt und der Mittelpunkt von $K_i^+$ werde mit $P_i$ bezeichnet $(i = 0, 1, \ldots m)$. Ist $H_i(u)$ die Stützfunktion von $K_i$ und $v_{ij}$ der Vektor $\overrightarrow{P_i P_j}$ $(j = 0, 1, \ldots m, i \neq j)$, so findet man für den Abstand $\pm d$, den eine zu $u$ gehörige Stützebene von $K_i$ von einer zu $-u$ gehörigen Stützebene von $K_j$ hat

$$d = u \cdot v_{ij} - (H_i(u) + H_i(-u)).$$

Dabei gibt es dann und nur dann ein gewisses $u$, für das $d \geqslant 0$ gilt, wenn $K_i$ und $K_j$ einander nicht überlappen. Ist hingegen für kein $u$ $d > 0$, so ist dies äquivalent mit der Aussage, daß $K_i$ mit $K_j$ mindestens einen gemeinsamen Punkt hat. Definiert man $d^+$ analog wie $d$ aber für die Körper $K_i^+$, $K_j^+$, so hat man

$$d^+ = u \,.\, v_{ij} - (G_i(u) + G_i(-u)),$$

wobei $G_i(u)$ die zu $K_i^+$ gehörige Stützfunktion ist, also

$$G_i(u) = \tfrac{1}{2}\,(H_i(u) + H_i(-u)).$$

Daraus folgt sofort $d^+ = d$. Demnach berühren oder überlappen $K_i$, $K_j$ einander genau dann, wenn dies für $K_i^+$, $K_j^+$ zutrifft.

Sind $M$ und $M_i$ ($i=1, 2, \ldots r, r > 1$) konvexe Körper, derart daß $M$ die Vereinigung aller $M_i$ ist, und haben zwei verschiedene $M_i$ höchstens Randpunkte gemeinsam, so werde gesagt, daß $M$ in die Körper $M_i$ zerlegt werden kann.

*Hilfssatz* 2: Ein konvexer Körper $M$ kann nur dann in zu $M$ homothetische Körper zerlegt werden, wenn er ein Parallelepiped ist.

*Beweis*: Angenommen, es liege eine Zerlegung der genannten Art vor. Man sieht unmittelbar, daß $M$ ein Polyeder sein muß und es bedeutet keine wesentliche Einschränkung, wenn man $M$ als abgeschlossen voraussetzt. Für ein beliebiges $d$-dimensionales Polyeder $P$ sollen dessen ebene $(d-1)$-dimensionale (abgeschlossene) Begrenzungsflächen die Seiten von $P$ heißen und unter einem inneren Punkt von $P$ ist ein Punkt zu verstehen, der in $P$ aber in keiner Seite von $P$ liegt. Die Eigenschaft ein innerer Punkt zu sein ist also unabhängig von der Dimension des Raumes in dem $P$ eingebettet ist. Für $n = 1$ ist der Hilfssatz trivial und für $(n-1)$-dimensionale Polyeder soll die Induktionsannahme gemacht werden, daß die Behauptung richtig ist. Wenn $S$ eine Seite von $M$ ist, so bewirkt die Zerlegung von $M$ eine Zerlegung von $S$ in zu $S$ homthetische Polyeder. Da $S$ $(n-1)$-dimensional ist, folgt aus der Induktionsannahme, daß $S$, und damit jede Seite von $M$, ein Parallelepiped sein muß. Es soll nun eine Seite $s$ von $S$ betrachtet werden. $s$ ist der Durchschnitt von $S$ mit gewissen anderen Seiten von $M$. Aus der Konvexität von $M$ folgt aber sofort, daß $s$ der Durchschnitt von $S$ mit genau einer Seite, etwa $S_0$, von $M$ ist. $S$ hat als Parallelepiped genau eine zu $s$ parallele Seite $s'$. Analog wie $s$ ist $s'$ der Durchschnitt von $S$ mit einer gewissen Seite $S_0'$ von $M$. Es läßt sich zeigen, daß $S_0$ und $S_0'$ parallel sein müssen. Um dies einzusehen, werde ein zu $S$ homothetisches

Polyeder $\overline{S}$, das in $S$ eingelagert ist, betrachtet. Bei dieser Homothetie sollen $s$, $s'$, $S_0$, $s_0'$ die Parallelepipede $\bar{s}$, $\bar{s}'$, $S_0$, $\overline{S}_0'$ entsprechen. $\bar{s}$ sei so gewählt, daß $\bar{s} \subset s$ ist. $\bar{s}'$ liegt dann nicht auf dem Rande von $S$; denn läge es auf dem Rande, so wäre $\bar{s}' \subset s'$ und daher $S = \overline{S}$. Da $S$ lückenlos ausgefüllt wird, muß $\bar{s}'$ in der Vereinigung gewisser $(n-2)$-dimensionaler Parallelepipede liegen, die ihrerseits im Durchschnitt von zu $S_0$ bzw. $S_0'$ homothetischen Parallelepipeden enthalten sind. Es folgt, daß sich in $\bar{s}'$ zwei Ebenen $E_1$, $E_2$ mit $\overline{S}_0 \subset E_1$, $\overline{S}_0' \subset E_2$ treffen. Wäre $E_1 \neq E_2$, so könnte man irgendeinen inneren Punkt $P$ von $\overline{S}'$ auswählen und es gäbe dann beliebig nahe an $P$ liegende Punkte von $M$ die durch $E_1$ und $E_2$ von den in $M$ eingelagerten Polyedern, die sich längs $\bar{s}'$ treffen, separiert werden. Offenbar könnte dann einer dieser Punkte so nahe an $P$ gewählt werden, daß er in überhaupt keinem in $M$ eingelagerten Polyeder liegt, dies widerspräche der Annahme, daß eine Zerlegung von $M$ gegeben sei. Es muß daher $E_1 = E_2$ gelten und $S_0$ mit $S_0'$ parallel sein.

Die Seiten von $S$ sollen jetzt mit $s_i$, $s_i'(i = 1, 2, \ldots n-1)$ bezeichnet werden; $s_i'$ ist dabei die zu $s_i$ parallele Seite von $S$. Sind $S_i$ und $S_i'$ die von $s_i$ bzw. $s_i'$ ausgehenden Seiten von $M$, so sind nach dem eben Bewiesenen $S_i$ und $S_i'$ parallel. Ist $s_i^0$ die zu $s_i$ parallele Seite von $S_i$, so muß, da sich das, was für $S$ bewiesen wurde, auch auf $S_i$ anwenden läßt, von $s_i^0$ eine zu $S$ parallele Seite $S'$ ausgehen. Analoges gilt für die $S_i'$. Aus der Konvexität von $M$ folgt sofort, daß alle auf diese Weise erzeugten $S'$ identisch sein müssen. Weil $S'$ zwischen paarweise parallelen Seiten, die von den $s_i$, $s_i'$ ausgehen, liegt, ist das Parallelepiped $S'$ mit $S$ translationsgleich. $M$ besteht also aus zwei translationsgleichen Parallelepipeden $S$, $S'$ und paarweise parallelen Parallelepipeden, die von den entsprechenden Seiten von $S$ und $S'$ ausgehen; selbstverständlich gehören auch alle Punkte, die innerhalb dieser konvexen Fläche liegen, zu $M$. Das heißt aber, daß $M$ ein Parallelepiped ist und somit ist der Hilfssatz bewiesen.

Der folgende Hilfssatz ist für beliebige konvexe Körper richtig, da er jedoch nur für konvexe Polyeder gebraucht wird, soll auch der Beweis nur für diesen Spezialfall erbracht werden.

*Hilfssatz* 3: Ist $L$ ein konvexes Polyeder und ist das durch Zentralsymmetrisierung aus $L$ hervorgehende konvexe Polyeder $L^+$ ein Parallelepiped, so ist auch $L$ ein Parallelepiped.

*Beweis*: Es werde vorausgesetzt, daß der Mittelpunkt von $L^+$ der Ursprung des Koordinatensystems ist. Aus der Definition von $L^+$ folgt

sofort folgende Behauptung: Ist P irgendein Punkt der Oberfläche von $L$ und ist $L_P$ ein zu $L$ translationsgleicher Körper, der $L$ in $P$ berührt, so ist der Mittelpunkt von $L_P$ ein Punkt der Oberfläche von $2\,L^+$.

Durchläuft $P$ alle Punkte einer gewissen Seite $S$ von $L$, so liegen demnach die Mittelpunkte von $L_P$ auf einer zu $S$ parallelen Seite von $2\,L^+$. $L^+$ muß daher eine zu $S$ parallele Seite enthalten. Die Anzahl der nicht parallelen Seiten von $L^+$ ist daher nicht kleiner als die Anzahl der nicht parallelen Seiten von $L$. $L^+$ hat als Parallelepiped genau $n$ nicht parallele Seiten, so daß $L$ höchstens $n$ nicht parallele Seiten hat. Um aber einen beschränkten Körper zu erhalten ist anderseits nötig, daß $L$ mindestens $n$ nicht parallele Seiten und zu jeder dieser Seiten noch eine dazu parallele Seite enthält. Der konvexe Körper $L$ hat somit genau $2\,n$ paarweise parallele Seiten und ist dadurch als Parallelepiped gekennzeichnet.

*Beweis von Satz* 3: Es genügt offenbar, den Beweis für den Fall, daß $a < 2$ ist und daß $K$ den Koordinatenursprung $O$ als Mittelpunkt hat, zu erbringen. $K$ besteht dann aus allen Punkten $X$ mit $d(O, X) \leqslant 1$. $P_1, P_2, \ldots P_p$ seien $p$ auf der Oberfläche von $K$ liegende Punkte mit

$$d(P_i, P_k) \geqslant a \qquad (i = 1, 2, \ldots p,\ k = 1, 2, \ldots p;\ i \neq k).$$

Es werde

$$P_i' = \frac{2}{2-a}\,P_i \tag{3}$$

gesetzt und mit $K_i$ der konvexe Körper aller Punkte $X$ mit

$$d(P_i', X) \leqslant \frac{a}{2-a} \tag{4}$$

bezeichnet. Je zwei der Körper $K, K_1, \ldots K_p$ haben höchstens Randpunkte gemeinsam. Hätten nämlich $K$ und $K_i$ einen gemeinsamen inneren Punkt $X_0$, so wäre

$$d(P_i', X_0) < \frac{a}{2-a}, \qquad d(O, X_0) < 1$$

und daher

$$d(O, P_i') < 1 + \frac{a}{2-a} = \frac{2}{2-a}.$$

Diese Ungleichung kann aber nicht richtig sein, da wegen (3)

$$d(O, P_i') = \frac{2}{2-a}\,d(O, P_i) = \frac{2}{2-a}$$

sein muß. Hätten $K_i$ und $K_k$ $(i \neq k)$ einen inneren Punkt $X_0$ gemein, so wäre wegen (4)

$$d(P_i', X_0) < \frac{a}{2-a}, \qquad d(P_k', X_0) < \frac{a}{2-a}$$

und somit

$$d(P_i', P_k') < \frac{2a}{2-a}.$$

Im Widerspruch zu dieser Ungleichung folgt aber aus (3)

$$d(P_i', P_k') = \frac{2}{2-a}\, d(P_i, P_k) \geqq \frac{2a}{2-a}.$$

Es werde nun $\dfrac{2+a}{2-a}\, K = M$ gesetzt. $K$ und alle $K_i$ sind in $M$ enthalten. Für $K$ ist dies trivial, ist aber $X \in K_i$, so gilt, weil $O$, $P_i$, $P_i'$ auf einer Geraden liegen,

$$d(P_i, P_i') = d(O, P_i') - d(O, P_i) = \frac{2}{2-a} - 1 = \frac{a}{2-a}.$$

Daraus folgt

$$d(O, X) \leqq d(O, P_i) + d(P_i, P_i') + d(P_i', X) \leqq 1 + \frac{a}{2-a} + \frac{a}{2-a} = \frac{2+a}{2-a},$$

also $X \in M$. Bezeichnet nun $V$ das Volumen von $K$, so ergibt sich, da $K, K_1, K_2, \ldots K_p$ in $M$ eingelagert sind und höchstens Randpunkte gemeinsam haben,

$$V + p\left(\frac{a}{2-a}\right)^n V \leqq \left(\frac{2+a}{2-a}\right)^n V. \tag{5}$$

(5) ist mit (2) gleichbedeutend.

Es ist jetzt noch der Zusatz über das Gleichheitszeichen in (2) zu beweisen. Daß unter den im Satz 3 genannten Voraussetzungen in (2) oder, was dasselbe bedeutet, in (5) wirklich das Gleichheitszeichen gilt, folgt einfach daraus, daß das Gebiet zwischen den beiden Parallelepipeden $M$ und $K$ mit zu $\dfrac{a}{2-a}\, K$ translationsgleichen Parallelepipeden lückenlos ausgefüllt werden kann. Man beachte hierzu, daß der Minkowskische Abstand einer Seite von $M$ zu der einen der dazu parallelen Seiten von $K$ derselbe ist wie derjenige der zwei entspre-

chenden parallelen Seiten von $\frac{a}{2-a}K$ und daß wegen $g=\frac{2}{a}$ $\frac{2+a}{2-a}=\frac{g+1}{g-1}$ ein Vielfaches von $\frac{a}{2-a}=\frac{1}{g-1}$ ist.

Nun soll angenommen werden, daß in (2) und damit in (5) das Gleichheitszeichen gilt. Die zu $M$ homothetischen Körper $K, K_1, \ldots K_p$ bewirken dann eine Zerlegung von $M$. Hilfssatz 2 ergibt sofort, daß $M$ ein Parallelepiped sein muß. Ist $n<1$, so hat man noch $\frac{2}{a}=g$ zu beweisen. Es sei dazu $S$ irgendeine wegen $n>1$ existierende (1-dimensionale) Kante von $K$. $\frac{2+a}{2-a}S$ wird mit zu $\frac{a}{2-a}S$ translationsgleichen Strecken lückenlos ausgefüllt. Ist $L$ die Länge von $S$, so ergibt sich daher für die Längen von $\frac{2+a}{2-a}S$ bzw. $\frac{a}{2-a}S$

$$\frac{2+a}{2-a}L=h\frac{a}{2-a}L$$

mit einer ganzen Zahl $h$. Man erhält daraus $\frac{2}{a}=h-1=g$ mit ganzem $g$.

*Beweis der Sätze 1 und 2*: Ist $K$ symmetrisch, so folgen die Behauptungen unmittelbar aus Satz 3 ($a=1$). Ist $K$ nicht symmetrisch, und wird $K$ von den einander nicht überlappenden konvexen Körpern $K_1, K_2, \ldots K_m$ berührt, so gibt es offenbar den $K, K_1, \ldots K_m$ umschriebene konvexe untereinander translationsgleiche Polyeder $\overline{K}, \overline{K}_1, \ldots \overline{K}_m$, derart, daß $\overline{K}$ von den einander nicht überlappenden $\overline{K}_1, \ldots \overline{K}_m$ berührt wird. Aus Hilfssatz 1 folgt dann, daß dasselbe für die symmetrischen konvexen Körper $\overline{K}^*, \overline{K}_1^+, \ldots \overline{K}_m^+$ gilt. Nach dem schon Bewiesenen ist daher $m\leqslant 3^n-1$. Steht hierin das Gleichheitszeichen, so müßte $\overline{K}^+$ ein Parallelepiped sein. Aus Hilfssatz 3 folgte dann, daß auch $K$ ein Parallelepiped wäre. Da $K$ als nicht symmetrisch vorausgesetzt war, erhält man einen Widerspruch.

Schließlich sei noch erwähnt, daß ein zu Satz 3 analoges Resultat gilt, bei dem nicht von der Maximalanzahl der Punkte, die auf der Oberfläche von $K$ liegen, die Rede ist, sondern von der Maximalanzahl $q$ der Punkte, die mit einem Mindestabstand $\geqslant a$ in $K$ gelagert werden können. Aus einem allgemeinen Satz von E. Hlawka [3] ergibt sich nämlich

$$q \leqslant \left(\frac{2}{a}+1\right)^n. \tag{6}$$

Ganz ähnlich wie bei dem hier gegebenen Beweis von (2) kann man mittels des Hilfssatzes 2 folgern, daß in (6) das Gleichheitszeichen genau unter den in Satz 3 angegebenen Bedingungen auftritt.

## Literatur

[1] *H. Minkowski*, Geometrie der Zahlen, Seite 79 (Teubner 1910).
[2] *T. Bonnesen, W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper (Springer 1934).
[3] *E. Hlawka*, Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper, Monatsh. Math. 53, 81—131 (1949).

# On Certain Factors of Automorphy for the Modular Group of Degree n

By

**Ulrich Christian**, Princeton, N. J., USA

*(Received May 17, 1960)*

Let $\mathfrak{Z}$ be a complex analytic manifold and $\Gamma$ a group with the following properties.

a) *Each element* $M \in \Gamma$ *defines a holomorphic one — to — one map* $Z \to M\langle Z\rangle$ *of* $\mathfrak{Z}$ *onte itself.*

b) $(M_2 M_1)\langle Z\rangle = M_2\langle M_1\langle Z\rangle\rangle$.

Here $Z$ denotes the variable point on $\mathfrak{Z}$. A form $F(Z)$ is a not identically — vanishing holomorphic function on $\mathfrak{Z}$ satisfying the conditions

$$F(M\langle Z\rangle) = I(M; Z)\, F(Z) \qquad (M \in \Gamma). \tag{1}$$

The functions $I(M; Z)$ $(M \in \Gamma)$ are units, i. e., they are holomorphic and nowhere — vanishing on $\mathfrak{Z}$. The set of units $I(M; Z)$ is called the system of factors belonging to the form $F(Z)$. From (1) and b) we obtain the relations

$$I(M_2 M_1; Z) = I(M_2; M_1\langle Z\rangle)\, I(M_1; Z) \qquad (M_1, M_2 \in \Gamma) \tag{2}$$

between the factors $I(M; Z)$. Abstracting from the form $F(Z)$ we call any set of units $I(M; Z)$ $(M \in \Gamma)$ satisfying the relations (2) a system of factors. A system of factors $I(M; Z)$ is called genuine, if the equation (1) holds with any form $F(Z)$.

In our case $\mathfrak{Z}$ is the generalized upper half — plane, consisting of all complex symmetric matrices $Z = X + i\,Y$ with $n$ rows, $n$ columns and positive imaginary part $Y$. For $\Gamma$ we take the modular group of degree $n$, i. e., the set of all symplectic matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

with integral matrices $A$, $B$, $C$, $D$ each of which has $n$ rows and $n$ columns [8]. The map of $\mathfrak{Z}$ onto itself belonging to $M$ is defined by

$$M\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}. \tag{3}$$

The determinant $\mathrm{Det}(CZ + D)$ does not vanish on $\mathfrak{Z}$ [8]. Hence for each complex number $t$ one branch of the function

$$I_t(M; Z) = (\mathrm{Det}(CZ + D))^t \tag{4}$$

can be chosen uniquely on $\mathfrak{Z}$. In this paper we shall investigate the question for which complex numbers $t$ the functions $I_t(M; Z)$ form a system of factors, provided that the branches of the right — hand — side of (4) are chosen properly. Some remarks will be made wether these systems of factors are genuine or not.

**Theorem**: *The functions* (4) *form a system of factors if and only if* $t$ *is a rational integer* ($n \geqslant 2$).

**Proof**: First we make some general considerations. Let $\mathfrak{Z}$ be a complex analytic manifold and $\Gamma$ a group with the properties a) and b). If $\mathfrak{Z}$ is simply connected the factors $I(M; Z)$ may be written in the form

$$I(M; Z) = e^{2\pi i J(M; Z)} \tag{5}$$

with certain on $\mathfrak{Z}$ holomorphic functions $J(M; Z)$. From (2) we deduce the relations

$$J(M_2 M_1; Z) \equiv J(M_2; M_1\langle Z\rangle) + J(M_1; Z) \qquad (M_1, M_2 \in \Gamma). \tag{6}$$

The congruence — sign means that the difference of both sides is a rational integer. Any system of on $\mathfrak{Z}$ holomorphic functions $J(M; Z)$, satisfying the congruences (6), is called a system of exponents. Conversely by (5) each system of exponents $J(M; Z)$ goes over into a system of factors $I(M; Z)$.

Suppose there is a relation

$$M_2^{\alpha_{11}} \ldots M_r^{\alpha_{1r}} M_1^{\alpha_{21}} \ldots M_r^{\alpha_{2r}} \ldots M_1^{\alpha_{s1}} \ldots M_r^{\alpha_{sr}} = E \tag{7}$$

with certain rational integral exponents $\alpha_{\delta\varrho} (\delta = 1, \ldots, s; \varrho = 1, \ldots, r)$ between the elements $M_1, \ldots, M_r \in \Gamma$. The letter $E$ denotes the unit element of the group $\Gamma$. We introduce the expressions

$$\varepsilon_{\delta\varrho} = \left\{ \begin{matrix} 1 & (\alpha_{\delta\varrho} \geqslant 0) \\ -1 & (\alpha_{\delta\varrho} < 0) \end{matrix} \right\} \quad (\delta = 1, \ldots, s; \varrho = 1, \ldots, r),$$

$$N_{\delta\varrho} = M_\varrho^{\frac{\varepsilon_{\delta\varrho} - 1}{2}} M_{\varrho+1}^{\alpha_{\delta\varrho+1}} \ldots M_r^{\alpha_{\delta r}} M_1^{\alpha_{\delta+1\,1}} \ldots M_r^{\alpha_{\delta+1\,r}} \ldots M_1^{\alpha_{s1}} \ldots M_r^{\alpha_{sr}}$$
$$(\delta = 1, \ldots, s; \varrho = 1, \ldots, r).$$

Then by (6) the sum

$$j = \sum_{\delta=1}^{s} \sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{|a_{\delta\varrho}|} \varepsilon_{\delta\varrho} J(M_\varrho; (M_\varrho^{\varepsilon_{\delta\varrho}(\nu-1)} N_{\delta\varrho}) \langle Z \rangle) \tag{8}$$

is a rational integer which depens on the relation (7) and the given system of exponents $J(M; Z)$. Now assume the equations

$$\sum_{\delta=1}^{s} a_{\delta\varrho} = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{9}$$

are valid. Then the number $j$ does not change if one substitutes each exponent $J(M; Z)$ by a congruent exponent. Henc the number (8) is only dependent on the relation (7) and the system of factors $I(M; Z)$ given by (5). The equations (9) are the necessary and sufficient condition, that the left — hand — side of the relation (7) can be written as a product of commutators.

Now let be $\mathfrak{Z}$ the generalized upper half — plane, $\Gamma$ the modular group of degree $n$ and set

$$L(M; Z) = \frac{1}{2\pi i} \log (\mathrm{Det}(CZ + D)) \qquad (M \in \Gamma). \tag{10}$$

Each of the functions $L(M; Z)$ has different branches corresponding to the branches of the logarithm on the right — hand — side of (10). But $\mathrm{Det}(CZ + D)$ does not vanish on $\mathfrak{Z}$, hence for a given element $M \in \Gamma$ one branch of the function $L(M; Z)$ can be selected uniquely on $\mathfrak{Z}$. Our problem is to decide for which complex numbers $t$ the branches of the functions $L(M; Z)$ can be chosen such that the expressions

$$J_t(M; Z) = tL(M; Z) \qquad (M \in \Gamma) \tag{11}$$

form a system of exponents.

The functions $L(M; Z)$ are a system of exponents. Hence the expressions $J_t(M; Z)$ form a system of exponents if $t$ is a rational integer. Conversely suppose the functions $J_t(M; Z)$ are a system of exponents. For a given relation (7) we introduce the integers $j_t$ as in (8). Obviously

$$j_t = tj_1 \tag{12}$$

where $j_1$ is obtained by (8) if one replaces the functions $J(M; Z)$ by the expressions $L(M; Z)$. If furthermore the equations (9) are valid the number $j_1$ depends only on the relation (7) but not on the branches of the functions $L(M; Z)$.

We adjoin a symplectic matrix

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

of degree two the symplectic matrix

$$T(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & E^{(n-2)} & 0 & 0 \\ C & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^{(n-2)} \end{pmatrix}$$

of degree $n$, where $E^{(n-2)}$ denotes the unit matrix with $(n-2)$ rows and columns, set

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_1' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and introduce the elements

$$M_1 = T\begin{pmatrix} A_1' & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix},\ M_2 = T\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},\ M_3 = T\begin{pmatrix} E_1 & C_1 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix},\ M_4 = T\begin{pmatrix} E_1 & D_1 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = T\begin{pmatrix} E_1 & -D_1 & -D_1 \\ D_1 & E_1 & -D_1 \end{pmatrix}$$

of $\Gamma$. Obviously the relation

$$M_5^{12}(M_4M_5)^{-12}\,(M_4^{-2}M_2M_1M_3^{-2}M_1^{-1}M_2^{-1}M_1^2M_3M_1^{-2}M_3)^{-6} = E$$

holds and the equations (9) are satisfied. An elementary computation gives $j_1 = 1$. By (12) the rational integer $j_t = t$ and our theorem has been proved.

The numbers $j$ considered in the previous proof play an important role for the factors of automorphy and in connection herewith in the theory of automorphic functions [1, 3, 4, 5, 9, 10].

A form with the system of factors (4) is called a modular form of weight $t$. As before we suppose $n \geqslant 2$. Then on account of our theorem $t$ is a rational integer. We want to make some remarks about the existence of modular forms of a given weight $t$. By [6, 8] there are no modular forms of negative weight $t$, and the only modular forms of weight $t = 0$ are the complex constants different from zero. The question for which positive numbers $t$ there are modular forms of weight $t$ is not completely answered. But we know the following. If $t$ is even and $t > n + 1$ there are modular forms of weight $t$ given by Poincare series [7, 8]. Assume the number $nt$ is odd. Then by (4) we get $I_t(-M; Z) = -I_t(M; Z)$. On the other hand $(-M)\langle Z\rangle = M\langle Z\rangle$. Hence the equations (1) with a not identically — vanishing function $F(Z)$ are impossible. That means if $n$ is odd there are no forms of odd weight $t$. Finally suppose $n$ is even

but $t$ is odd. We shall prove that there are modular forms for all sufficiently large weights $t$ [2].

Choose $k = \frac{n(n+1)}{2}$ analytically independent modular functions [8] $P_\varkappa(Z)$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ and denote by $R(Z)$ their Jacobian determinant. From

$$R(M\langle Z\rangle) = \left(\frac{\partial(M\langle Z\rangle)}{\partial Z}\right)^{-1} \cdot R(Z)$$

and the fact that the Jacobian determinant

$$\frac{\partial(M\langle Z\rangle)}{\partial Z} = \operatorname{Det}(CZ+D))^{-(n+1)}$$

one obtains

$$R(M\langle Z\rangle) = (\operatorname{Det}(CZ+D))^{n+1} R(Z).$$

We set [2, 8]

$$P_\varkappa(Z) = \frac{Q_\varkappa(Z)}{Q(Z)} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

with certain modular forms $Q(Z)$, $Q_\varkappa(Z)$ $(\varkappa=1, \ldots, k)$, the common weight of which may be called $q$. Then the product

$$H(Z) = Q^{2k}(Z)\, R(Z)$$

is a modular form of weight

$$h = 2\,k\,q + n + 1 = n(n+1)\,q + n + 1.$$

But $n$ is even; hence $h$ is odd. Suppose $t$ is odd and $t > h + n + 1$. Then there is a modular form $G(Z)$ of the even weight $t - h$. The product

$$F(Z) = G(Z)\, H(Z)$$

has the weight $t$.

*The Institute for Advanced Study, Princeton N. J.*

## Literature

[1] *P. Appell,* "Sur les fonctions périodiques de deux variables", J. de Math. Pures et Appl., Sér IV, 7, 157—219 (1891).

[2] *U. Christian,* "Zur Theorie der Modulfunktionen $n$-ten Grades", Math. Ann. 133, 281—297 (1957).

[3] *F. Conforto,* „Abelsche Funktionen und Algebraische Geometrie", Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

[4] *G. Frobenius*, „Über die Grundlagen der Theorie der Jacobischen Funktionen", J. reine angew. Math., 97, 16—48 (1884).

[5] *R. S. Gunning*, "The Structure of Factors of Automorphy", Am. J. Math. 78, 357—382 (1956).

[6] *M. Koecher*, „Zur Theorie der Modulformen $n$-ten Grades I", M. Z. 59, 399—416 (1954).

[7] *H. Maass*, „Über die Darstellung der Modulformen $n$-ten Grades durch Poincaresche Reihen", Math. Ann. 123, 125—151 (1951).

[8] *C. L. Siegel*, „Einführung in die Theorie der Modulfunktionen $n$-ten Grades", Math. Ann. 116, 617—657 (1939).

[9] *A. Weil*, "Théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions thêta", Seminaire Bourbaki, May 1949.

[10] *A. Weil*, "Variétés Kählériennes", Hermann, Paris 1958.

# Buchbesprechungen

**Opere Scelte.** Band I (1899—1915). Von *G. Scorza.* Pubblicate a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. 512 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1960. Brosch. L. 5000.—.

*G. Scorza* (1876—1939) war Professor für analytische, projektive und darstellende Geometrie an mehreren italienischen Hochschulen, zuletzt in Rom. Dem entspricht es, daß seine Publikationen der Hauptsache nach geometrischen oder funktionentheoretischen Charakter im klassischen Sinne haben. Der vorliegende erste Band der jetzt erscheinenden ausgewählten Schriften enthält neben einem Nachruf von *L. Berzolari* ein vollständiges Verzeichnis der Schriften *Scorzas* mit 114 Titeln, ferner den Abdruck von 26 dieser Schriften aus der Zeit von 1899 bis 1915.

*K. Mayrhofer*, Wien

**Introduction aux Mathématiques Modernes.** Ensembles — Opérations sur les Ensembles — Propositions — Calcul des Propositions — Axiomatique — Le Groupe Commutatif. Von *A. Monjallon.* Mit 83 Textabb., 180 S. Paris: Librairie Vuibert. 1960. Fr. 2000.—.

Der Autor knüpft an die oft gestellte Frage an: „Warum ist unter allen Wissenschaften gerade die Mathematik so abweisend?" und glaubt, daß dies vor allem daran liegt, daß die Grundlagen vielfach zu Gunsten der formalen Rechentechnik zurückgedrängt werden. Es gibt weder eine öffnende Zauberformel, noch einen Königsweg, um das Wesen der Mathematik zu erfassen, sondern nur ein Zurückgehen auf die Grundlagen, nachdem eine gewisse Reife des Denkens durch das Studium spezieller Teile erreicht ist. Und einen solchen Exkurs in die Grundlagen der heutigen Mathematik beabsichtigt das vorliegende Buch.

Dabei werden die Begriffe: Menge, Relation und Funktion herausgehoben. Der Mengenbegriff sowie der Begriff des geordneten Paares werden an Hand von Beispielen nahegebracht, ferner allgemeine Eigenschaften der Mengen, sowie das Operieren mit ihnen ausführlich erörtert (Kap. 1 bis 3). Eine Relation ist dann eine Menge geordneter Paare von Elementen aus vorliegenden Mengen A, B (Kap. 4) und eine Funktion eine Relation spezieller Art, also letzten Endes ebenfalls eine Menge (Kap. 5). An diesen ersten Teil schließt eine elementar gehaltene Einführung in den Aussagenkalkül an (Kap. 6) und weiters ein Abschnitt über die axiomatische Begründung einer Disziplin (Kap. 7). Als Muster einer unmittelbar auf Axiome aufgebauten mathematischen Theorie werden die kommutativen Gruppen gewählt (Kap. 8). Jedem Kapitel ist eine Anzahl einschlägiger Aufgaben angeschlossen.

Dem Autor ist es gelungen, den zähen Gegenstand ausnehmend klar und zugleich ansprechend darzustellen, wozu auch die zahlreichen schematischen Figuren beitragen. Das Buch setzt keinerlei spezielle Kenntnisse voraus und wendet sich an jeden, der sich für Mathematik interessiert, vor allem aber an

die angehenden Mathematiklehrer, die an ihm nicht vorbeigehen sollten. Es wäre daher sehr zu begrüßen, wenn gerade dieses Buch auch in deutscher Sprache erscheinen würde. *K. Mayrhofer*, Wien

**Ingenious Mathematical Problems and Methods.** Von *L. A. Graham.* Mit 170 Textabb., VII, 237 S. New York: Dover Publications. 1959. Brosch. $ 1.45.

Das Büchlein stellt in seinem ersten Teil 75 Probleme aus verschiedenen Gebieten der Elementarmathematik, eingekleidet in Form von Anwendungsbeispielen, außerdem noch 25 Aufgaben, deren Lösung bei Einschlagen des richtigen Weges sehr rasch gefunden werden kann, die also einen Prüfstein für die geistige Wendigkeit des Lesers bilden. Im zweiten Teil findet man die Lösungen; dabei werden bei den meisten Beispielen mehrere verschiedene, manchmal verblüffend einfache Lösungsmethoden besprochen. Freunde mathematischer Unterhaltung werden daher mit dem Buch so manche anregende Stunde erleben. *W. Nöbauer*, Wien

**Basic Concepts of Elementary Mathematics.** Von *W. L. Schaaf.* Mit 220 Textabb., XVII, 386 S. New York-London: J. Wiley & Sons. 1960. Geb. $ 5.50.

Warum ist $2 + 3 = 3 + 2$? Ist diese Gleichung eine Definition, eine nicht zu verneinende Tatsache, eine beliebige Annahme, ein bemerkenswertes Zusammentreffen, ein glücklicher Zufall oder eine ewige Wahrheit? Auf solche Fragen gibt das Buch in seinem ersten Teil Antwort. Es ist kennzeichnend für dieses Werk, daß abstrakter Standpunkt und Axiome besonders hervorgehoben werden. Es wird das Wichtigste aus der Mengenlehre und der symbolischen Logik in verständlicher Art dargelegt. Mit diesem Rüstzeug werden elementare Arithmetik und Geometrie durchschritten. So wird das Rechnen mit natürlichen Zahlen unter Zugrundelegung der erforderlichen Axiome eingehend behandelt. Die positiven und negativen Zahlen, die rationalen und komplexen Zahlen werden als Zahlenpaare eingeführt und das Rechnen mit ihnen definiert. Es folgen nun Stoffgebiete der Mittelschulmathematik wie Trigonometrie, Funktionen aller Art mit graphischen Darstellungen, Zinseszinsrechnungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kombinatorik und Lebensversicherung. Ein lesenswertes Buch, das die Grundbegriffe der Elementarmathematik in bemerkenswerter Klarheit darstellt! *L. Laub*, Wien

**Intermediate Algebra.** Von *R. Dubisch, V. E. Howes* und *St. J. Bryant.* Mit 33 Textabb., XII, 286 S. New York-London: J. Wiley & Sons. 1960. Geb. $ 4.50.

Das vorliegende Buch behandelt Kapitel der Mathematik, die an unserer Mittelschule in der fünften, sechsten und siebenten Klasse durchgenommen werden: Auflösen von Gleichungen ersten Grades mit einer, zwei und drei Unbekannten (mit Determinanten). Die quadratische Gleichung mit einer Unbekannten. Gleichungen höheren Grades, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen. Wurzelgleichungen, besondere Gleichungen mit rationalen Lösungen. Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten. Das Rechnen mit Potenzen. Logarithmieren. Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen. Ein kurzes Kapitel über komplexe Zahlen. Das Buch kann Schülern wegen der breiten, leicht faßlichen Darstellung, wegen der zahlreichen Musterbeispiele und vielen Übungsaufgaben bestens empfohlen werden. *J. Laub*, Wien

**Introduction to Matrices and Linear Transformations.** Von *D. T. Finkbeiner, II.* (A Series of Undergraduate Books in Mathematics.) VII, 248 S. San Francisco-London: W. H. Freeman and Co. 1960. Geb. $ 6.50.

Diese Einführung in die lineare Algebra beginnt mit einem Kapitel, in welchem die grundlegenden Begriffe Menge, Abbildung, algebraische Struktur, Gruppe, Körper kurz besprochen werden. Hierauf werden Vektorräume betrachtet und ihre linearen Transformationen zunächst allgemein, dann mittels Matrizen untersucht. Die Determinante wird als gewissen Bedingungen genügende Matrixfunktion definiert, lineare Gleichungssysteme werden sowohl nach der Cramerschen Regel, als auch mit Eliminationsmethoden gelöst. Nach einem Kapitel über Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen werden Eigenwerte und Eigenvektoren von linearen Transformationen studiert; im Anschluß daran wird die Jordansche Normalform ausführlich behandelt. Dann werden Vektorräume mit innerem Produkt betrachtet und für sie die Begriffe Länge, Abstand und Orthogonalität definiert; hier findet man natürlich auch die wichtigsten Sätze über orthogonale Transformationen und quadratische Formen. Den Abschluß bildet ein Kapitel über Funktionen von Matrizen und Matrizen mit Funktionen als Elementen, in dem unter anderem die Auflösung von linearen homogenen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten besprochen wird, und ein Anhang über die kombinatorische Äquivalenz von Matrizen.

Das Buch ist klar geschrieben, allerdings etwas abstrakt; für den mathematisch wenig vorgebildeten Leser werden daher die zahlreichen Beispiele und Übungsaufgaben eine willkommene Hilfe zum besseren Verständnis sein.

*W. Nöbauer*, Wien

**A Concrete Approach to Abstract Algebra.** Von *W. W. Sawyer.* (A Series of Undergraduate Books in Mathematics.) 234 S. San Francisco-London: W. H. Freeman and Co. 1959. $ 1.25.

Das ansprechende Büchlein will den Leser einführen in die Gedankengänge der modernen, abstrakten Algebra. Es stellt daher in den Mittelpunkt seiner Betrachtungen den Begriff der algebraischen Struktur, der aus konkreten Beispielen erarbeitet wird, und die zur Konstruktion von neuen Strukturen aus gegebenen verwendeten Methoden, also Erweiterung und Restklassenbildung. Einige wichtige Strukturen, nämlich Körper, Polynomringe und Vektorräume, werden näher untersucht; das Schlußkapitel bringt einen Beweis für die Unmöglichkeit der Winkeldreiteilung. Leider werden Gruppen überhaupt nicht behandelt.

Die wohldurchdachte und sehr ausführliche Darstellung wird jeden Leser ohne Mühe zum Verständnis der grundlegenden algebraischen Begriffe und Methoden führen. Das Buch ist daher besonders mathematisch interessierten Laien sehr zu empfehlen.

*W. Nöbauer*, Wien

**Grundlagen der Gruppoide und Gruppentheorie.** Von *O. Borůvka.* (Hochschulbücher für Mathematik: Band 46.) XII. 198 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1960. Geb. DM 28.20.

Unter einem Gruppoid versteht man heute eine albegraische Struktur mit einer einzigen binären Verknüpfung; die Begriffe Halbgruppe, Quasigruppe und Gruppe sind also im Gruppoidbegriff als Spezialfälle enthalten. In diesem Buch wird eine allgemeine Theorie der Gruppoide entwickelt, die schließlich

zu schönen Sätzen über Reihen von Faktorgruppoiden führt. Haupthilfsmittel sind dabei der Homomorphiesatz und das Studium der Kongruenzrelationen in Gruppoiden. Bei deren Untersuchung spielt die Theorie der Zerlegungen von Mengen eine große Rolle, sie wird daher zu Beginn des Buches ausführlich dargestellt. Die Gruppentheorie wird als Spezialfall der Gruppoidtheorie aufgebaut, und durch Spezialisierung der Sätze über Gruppoide ergeben sich die bekannten Sätze über Restklassenzerlegungen, Isomorphismen und Untergruppenketten, teilweise in allgemeinerer Fassung als gewöhnlich üblich.

Das mit großer Sorgfalt geschriebene Buch ist durch Erweiterung einer von demselben Verfasser stammenden tschechischen Einführung in die Gruppentheorie entstanden. Von den Gruppen bringt es zwar nur die Anfangsgründe, wegen seines originellen Zugangs zur Gruppentheorie und wegen der Kapitel über Mengenzerlegungen und Gruppoide aber bildet es einen interessanten und wertvollen Beitrag zur modernen Algebra. *W. Nöbauer*, Wien

**Algebras and Their Arithmetics.** Von *L. E. Dickson*. Unveränderter Neudruck der ersten Auflage, 1923. XII, 241 S. New York: Dover Publications. 1960. $ 1.35.

Durch diesen Neudruck wird ein klassisches Werk der mathematischen Literatur wieder allgemein zugänglich. Es ist allerdings zu bedauern, daß nicht die 1927 erschienene deutsche Fassung des Buches — Besprechung im Monatsh. Math. 36 — wiederaufgelegt wurde, da sie gegenüber dem englischen Original wesentliche Verbesserungen und Erweiterungen aufweist. *W. Nöbauer*, Wien

**An Introduction to the Theory of Numbers.** Von *I. Niven* und *H. S. Zuckerman*. VIII, 250 S. New York-London: J. Wiley & Sons. 1960. Geb. $ 6.25.

Das Buch beginnt mit einem Kapitel über Teilbarkeit von ganzen Zahlen und die einfachsten Eigenschaften der Primzahlen, behandelt dann Kongruenzen und quadratische Reste. Nach einem Abschnitt über zahlentheoretische Funktionen werden einige diophantische Gleichungen untersucht und die Elemente der Theorie der quadratischen Formen dargestellt. Die beiden nächsten Kapitel beschäftigen sich mit Fareybrüchen und Kettenbrüchen und einige Anwendungen der Kettenbruchtheorie. Es folgen einfache Sätze über die Verteilung der Primzahlen. Weiter werden die Elemente der algebraischen Zahlentheorie, natürlich vor allem in quadratischen Zahlkörpern, entwickelt, dann werden einige Sätze über Zerfällungen bewiesen. Das letzte Kapitel behandelt Dichtefragen und enthält unter anderem einen Beweis des berühmten Satzes von *Mann*.

Man findet in dem Buch also ziemlich alles, was man sich von einer Einführung in die Zahlentheorie erwartet, nur die Anfangsgründe der Geometrie der Zahlen wird man vielleicht vermissen. Der Zielsetzung des Buches entsprechend werden keine tiefliegenden Ergebnisse gebracht, die grundliegenden Begriffe und Sätze aber sind ausführlich und klar behandelt; zahlreiche Übungsaufgaben ergänzen den Text. *W. Nöbauer*, Wien

**Representations of Primes by Quadratic Forms.** Displaying solutions of the diophantine equation $\varkappa p = a^2 + Db^2$. Part I: $D = 5$, 6, 10, and 13. Vorbereitet von *H. Gupta*, *M. S. Cheema*, *A. Mehta* und *O. P. Gupta*. Herausgegeben von *J. C. P. Miller*. (Royal Society Mathematical Tables: Band 5.) XXIV, 135 S. Für die Royal Society. Cambridge: At the University Press. 1960. Geb. 45 s. net.

Die Tafeln geben für alle Primzahlen $p < 100000$ Darstellungen der Form

$$p = a^2 + 5b^2, \quad p = a^2 + 6b^2, \quad p = a^2 + 10b^2, \quad p = a^2 + 13b^2$$

$$2p = a^2 + 5b^2, \; 2p = a^2 + 6b^2, \; 2p = a^2 + 10b^2, \; 2p = a^2 + 13b^2$$

(sofern solche existieren). Ferner geben sie die kleinsten Werte für $n$ an, so daß $n^2 + 5$, bzw. $n^2 + 6$, $n^2 + 10$, $n^2 + 13$ durch $p$ bzw. $2p$ teilbar ist. Sie enthalten auch die Werte $\varkappa$, so daß $\varkappa p = n^2 + D$ und $2\varkappa p = n^2 + D$ mit $D = 5, 6, 10, 13$. Die Einleitung enthält theoretische Ausführungen über die Darstellung von Zahlen durch quadratische Formen und über die Bedeutung in der Theorie der quadratischen Zahlkörper. Die Tafeln sind ein wertvolles Hilfsmittel für Zahlentheoretiker, einschließlich der Liebhaber für Zahlentheorie. *N. Hofreiter*, Wien

**Wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden in der Zahlentheorie.** Von *J. Kubilius*. (Akademie der Wissenschaften der litauischen S. S. R., Institut für Physik und Mathematik: Publikation Nr. 2.) Russisch. 164 S. Vilnius: Volksverlag für politische und wissenschaftliche Literatur der litauischen S. S. R. 1959.

Dieses Buch beschäftigt sich mit der Verteilung der Werte von additiven zahlentheoretischen Funktionen, das sind solche, für die $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$ bei teilerfremden $m$ und $n$; z. B. ist die Anzahl $\omega(m)$ der verschiedenen Primteiler von $m$ eine solche. Das erste Resultat dieser Art war wohl das von *Hardy* und *Ramanujan* 1917 gefundene Ergebnis, daß $n$ „normalerweise" loglog $n$ Primteiler hat. Es gelang *Turàn* 1934, einen sehr einfachen wahrscheinlichkeitstheoretischen Beweis für diese Tatsache zu finden. Als einen weiteren Meilenstein in der durch die *Turàn*'sche Arbeit angebahnten Entwicklung nennen wir nur das Resultat von *Erdös*, wonach die Anzahl der $n \leqslant x$, für die $\omega(m) -$ $-$ loglog $n < x\sqrt{\text{loglog } n}$ bei festem $x$ annähernd Gaussisch verteilt ist und den allgemeine additive Funktionen betreffenden Satz von *Erdös* und *Kac*. Im folgenden wurden dann von vielen Autoren u. a. von *Le Veque, Delange, Halberstam, Shapiro, Tanaka* und vom Verfasser Untersuchungen über diese Fragen angestellt und es zeigte sich dabei, daß wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden dabei sehr nützlich sind; z. B. konnte der Verfasser ein Ergebnis erzielen, welches zu den Resultaten von *Kolmogoroff* aus der Theorie der stochastischen Prozesse analog ist. Wir können die Fülle von Ergebnissen, die hier teilweise zum ersten Mal — dargestellt werden, im einzelnen nicht wiedergeben und wollen daher nur die Kapitelüberschriften nennen. Anwendung der Methode des Siebes von *Eratosthenes* (Brun'sche Siebmethode). Additive arithmetische Funktionen und zufällige Veränderliche. Das Gesetz der großen Zahlen. Eindimensionale asymptotische Integral- und lokale Verteilungsgesetze. Asymptotische Gesetze für Summen additiver Funktionen. Asymptotische Abschätzung des Restgliedes in den asymptotischen Verteilungsgesetzen. Die Verteilung der „abgeschnittenen" Funktionen. Mehrdimensionale asymptotische Verteilungsgesetze, Additive arithmetische Funktionen im Gaussischen Zahlkörper. — Die Darstellung ist knapp, jedoch sehr verständlich. Eine deutsche Übersetzung dieses bedeutsamen Werkes wäre dringend zu wünschen. *K. Prachar*, Wien

**Differential- und Integralrechnung.** Von *W. Maak*. (Studia Mathematica, Mathematische Lehrbücher: Band VIII.) Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 14 Textabb., VI, 376 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1960.

Das vorliegende Buch, dessen erste Auflage in Monatsh. f. Math. 55, 94 (1951) besprochen wurde, liegt nun hier in zweiter Auflage vor. Der Unterschied gegenüber der ersten Auflage besteht vor allem darin, daß nun die Funktionen von mehreren Variablen bedeutend ausführlicher behandelt werden, dadurch

einmal, daä sich das Buch nicht mehr beschränkt auf Funktionen von zwei Variablen. Dann wurde aufgenommen: der Satz über implizite Funktionen (Beweis nach der Iterationsmethode), die Transformation von mehrfachen Integralen (und zwar jetzt nach der Methode der Zerlegung der Abbildungen in primitiven Abbildungen) und der Stokessche Integralsatz in beliebigen Dimensionen (und zwar nach der Abbildungsmethode, allerdings nur für Zellen). Damit ist natürlich auch eine Entwicklung des Kalküls der alternierenden Differentiale verknüpft. Aus dieser Skizzierung ersieht man, daß gerade diese Dinge aufgenommen worden sind, die ständig gebraucht werden, deren Beweise aber in den vorliegenden Lehrbüchern entweder nur unexakt dargestellt werden, oder unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, unter denen die Beweise in der beschränkten Zeit einer Vorlesung auch unmöglich durchzuführen sind. Man muß dem Verfasser dankbar sein, daß er unter Voraussetzungen, die für die Anwendungen im Allgemeinen ausreichen, gezeigt hat, wie man auf beschränktem Raum kurze, übersichtliche und exakte Beweise dieser grundlegenden Sätze, das gilt vor allem für den Stokesschen und damit auch für den Gaußschen Integralsatz, durchführen kann. Damit erscheint eine der Hauptschwierigkeiten in den Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung bei Funktionen von mehreren Variablen überwunden. Für die Bogenlänge und den Flächeninhalt von glatten Flächenstücken wird nur das zugehörige Integral angeführt, ohne eine geometrische Herleitung zu geben. Ich glaube, es wäre ohne weiteres möglich gewesen, eine geometrische Definition zu bringen, da ja das Buch die Transformationsformel für mehrfache Integrale enthält, sagen wir z. B. nach der Minkowskischen Definition, ohne daß der Umfang des Buches wesentlich gestiegen wäre. Die Darstellung ist konzis, aber gut verständlich, so daß es neben einer Vorlesung oder auch zum Selbststudium durchaus verwendbar ist. Wertvoll sind die kurzen Literaturangaben, obwohl vielleicht an manchen Stellen nicht ganz klar ist, wie die Auswahl getroffen wurde. Vielleicht erscheinen die philosophischen Bemerkungen, die der Verfasser an einigen Stellen macht, dem Uneingeweihten etwas mysteriös, und etwas gefährlich halte ich die Schlußausführungen des Verfassers über den Zahlbegriff, da sie gewisse Philosophen zu einigen kühnen Gedankengängen verleiten könnten. Doch spielen diese Bemerkungen für die mathematischen Entwicklungen in diesem Buch überhaupt keine Rolle, und das Buch kann außerordentlich warm empfohlen werden.

*E. Hlawka*, Wien

**Aufgabensammlung zur höheren Mathematik.** Band I. Von *N. M. Günter* und *R. O. Kusmin*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 32.) Übersetzung aus dem Russischen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 162 Textabb., VIII, 507 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1960. Geb. DM 14.80.

Die bekannte Aufgabensammlung — ein Standardwerk der Literatur über höhere Mathematik — ist nun in zweiter Auflage erschienen. Für eine Besprechung der ersten Auflage vergleiche man Monatshefte f. Math. Bd. 62, 89 (1958). Der vorliegende Band wurde durch ein Literaturverzeichnis ergänzt und verbessert und wird weiterhin ein unentbehrliches Hilfsmittel für jeden an Mathematik interessierten Studenten sein.

*K. Prachar*, Wien

**Fonctions Entières d'Ordre Fini et Fonctions Méromorphes.** Von *G. Valiron*. (Monographies de L'Enseignement Mathématique: No. 8.) Mit 4 Textabb., 150 S. Genève: L'Enseignement Mathématique. 1960. Brosch. sfr. 20.—.

Dieses aus Vorlesungen von *G. Valiron* entstandene und mit einem Vorwort von *H. Milloux* versehene Buch bringt einige Problemkreise der ganzen Funktionen von endlicher Ordnung, wie sie von *Valiron* mehrfach behandelt wurden. Die erste Hälfte enthält eine ausgezeichnete Zusammenfassung der Sätze, die sich um das Maximalglied der Entwicklung einer ganzen Funktion gruppieren, die Produktdarstellung von Funktionen mit einer Ordnung kleiner als 1 und die von dem Satz von *Boutroux-Cartan* ausgehende Entwicklung, die in dem Satz von *Wiman* gipfelt. Der zweite Teil des Buches ist durch die systematische Verwendung der Inversen der meromorphen Funktionen und der zugehörigen Riemannschen Fläche charakterisiert. So wird zunächst die Klasse $W$ von ganzen Funktionen (nach dem Satz von *Wiman*) untersucht; es folgen die Sätze von *Iversen* und *Groß*. Sodann werden die Nevanlinnaschen Funktionen mit der Kugelcharakteristik nach *Ahlfors* und *Shimizu* eingeführt. Das letzte Kapitel bringt die Theorie von *Ahlfors*. *H. Hornich*, Wien

**Bessel Functions.** Part III: Zeros and Associated Values. Prepared under the direction of the Bessel Functions Panel of the Mathematical Tables Committee. Herausgegeben von *F. W. J. Olver*. (Royal Society Mathematical Tables: Band 7.) Mit 2 Textabb., LX, 79 S. Cambridge: At the University Press (für die Royal Society). 1960. Geb. 50/— net.

Alle mathematischen Physiker wissen, welche Bedeutung die Besselfunktionen haben und daß man die Nullstellen bei vielen Problemen braucht. Sie werden daher die Wichtigkeit dieser Tafeln richtig einschätzen. In einer ausführlichen Einleitung werden die Methoden zur Berechnung der Nullstellen geschildert und es wird gezeigt, wie man die Tafeln zweckmäßig gebraucht. Alle Zahlen in den Tafeln sind auf 8 Dezimalen angegeben. Die Tafeln enthalten

I) die Nullstellen $j_{n,s}$ von $J_n(s)$, die Nullstellen $y_{n,s}$ von $Y_{n,s}$ und die Werte $J'_n(j_{n,s})$ und $Y'_n(y_{n,s})$;

II) die Nullstellen $j'_{n,s}$ von $J'_n(x)$, die Nullstellen $y'_{n,s}$ von $Y'_n(x)$ und die Werte $J_n(j'_{n,s})$, $Y_n(y'_{n,s})$;

III) die Nullstellen $a'_{m,s}$, $b'_{m,s}$ der Ableitungen $j'_m(x)$, $y'_m(x)$ der sphärischen Besselfunktionen und die Werte $j_m(a'_{m,s})$ und $y_m(b'_{m,s})$. *N. Hofreiter*, Wien

**Tables of the Riemann Zeta Function.** Von *C. B. Haselgrove* in Zusammenarbeit mit *J. C. P. Miller*. (Royal Society Mathematical Tables: Band 6.) XXIII, 80 S. Cambridge: At the University Press (für die Royal Society). 1960. Geb. 50/— net.

Seit 100 Jahren ist die Riemannsche Zetafunktion Gegenstand zahlreicher tiefgründiger Untersuchungen. Daran sind besonders die analytischen Zahlentheoretiker beteiligt gewesen. Erst durch die elektronischen Rechenanlagen konnte ein wesentlicher Fortschritt in der numerischen Berechnung erzielt werden. Nur mit solchen Maschinen konnte das vorliegende Tafelwerk entstehen. Es enthält Werte von $\zeta(s)$ für $s = \frac{1}{2} + it$ und $s = 1 + it$ für $0 \leqq t \leqq 100$ (Spanne: 0.1), Werte von $Z(t)$ für $100 \leqq t \leqq 1000$ (Spanne: 0.1) und 1600 Nullstellen $\gamma_n$ von $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ und die Werte $|\zeta'(\frac{1}{2} + i\gamma_n)|$. *N. Hofreiter*, Wien

**Partielle Differentialgleichungen.** Eine Einführung. Von *G. Hellwig*. (Mathematische Leitfäden.) Mit 35 Textabb., 246 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1960.

Das vorliegende Werk gibt eine sehr moderne Darstellung der Rand- und Eigenwertprobleme der partiellen Differentialgleichungen. Ein ungeheurer Stoff wurde hier auf 250 Seiten verarbeitet. Die Darstellung beschränkt sich nicht nur auf die klassischen Differentialgleichungen wie Potentialgleichung, Wellengleichung, Wärmeleitungsgleichung. Die Beweise werden unter sehr allgemeinen Voraussetzungen geführt. Das erste Kapitel — Beispiele — behandelt die Wellengleichung, wo gleich das Anfangsproblem dargelegt wird, die Potentialgleichung, wo die grundlegenden Sätze der Potentialtheorie entwickelt werden, und die Wärmeleitungsgleichung, wo ebenfalls gleich der Existenzsatz für das Anfangswertproblem bewiesen wird. Das zweite Kapitel behandelt die Typeneinteilung, Charakteristikentheorie und Normalform. Auch dieses Kapitel ist außerordentlich inhaltsreich. Ich hebe nur die Behandlung von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung hervor, wo Untersuchungen von *Haack* und dem Verfasser verwendet werden. Das dritte Kapitel behandelt die Eindeutigkeitsfragen, und zwar sowohl nach der Maximum-MinimumMethode wie nach der Energieintegralmethode, und zwar sowohl für die elliptischen, parabolischen, hyperbolischen Typen (dabei natürlich das Ausstrahlungsproblem) als auch für den gemischten Typus. Das vierte und wichtigste Kapitel ist das Kapitel über die Existenzfragen. Bei den Gleichungen vom hyperbolischen Typus wird außer den modernen Methoden auch die klassische Riemannsche Methode berücksichtigt. Bei den Rand- und Anfangswertproblemen der Gleichungen vom hyperbolischen und parabolischen Typus wird auch der Kalkül der Laplace-Transformation in ziemlich ausführlicher Weise entwickelt. Das Randwertproblem bei den elliptischen Differentialgleichungen wird für die erste Randwertaufgabe behandelt, aber unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, und stellt meines Erachtens den Höhepunkt des Buches dar. Besonders hervorheben möchte ich den eleganten Beweis von *Wienholtz* für die Annahme der Randwerte (unter gewissen Bedingungen natürlich) der Lösung. Das fünfte Kapitel behandelt die Existenzbeweise bei Verwendung von Hilfsmitteln der Funktionalanalysis. Nach einem Einleitungsabschnitt über den Hilbertschen Raum wird die Schaudersche Beweistechnik dargelegt und das reguläre Eigenwertproblem behandelt. Den Abschluß bilden Untersuchungen über das elliptische Differentialgleichungssystem in zwei Variablen, welches zuerst von *Hilbert* betrachtet wurde und um welches sich vor allem *W. Haack* und der Verfasser große Verdienste erworben haben. Aus dieser kurzen Inhaltsübersicht sieht man schon, wie umfangreich der behandelte Stoff ist. Es ist natürlich klar, daß die Darstellung knapp sein mußte. Aber jeder, der die Differentialrechnung beherrscht und auch aus Vorlesungen über Differentialgleichungen oder in theoretischer Physik die Behandlung von einfachen Randwertaufgaben gelernt hat, also sagen wir, Studenten im mittleren Semester, wird das Buch mit Erfolg durcharbeiten können. Es wird sicher auf längere Zeit ein Standardwerk sein. Hervorheben möchte ich auch noch, daß die modernen Methoden, vor allem der Schule um *Courant*, hier nun in so ausgezeichneter Weise zugänglich gemacht wurden. Das Buch kann allen Mathematikern und Physikern wärmstens empfohlen werden.

*E. Hlawka*, Wien

**Lineare Differentialoperatoren.** Von *M. A. Neumark*. In deutscher Sprache bearbeitet und herausgegeben von *H. O. Cordes* und *F. Rühs*. (Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung, Mathematische Monographien: Band XI.) Mit 19 Textabb., XII, 394 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1960. Geb. DM 44.—.

Die Theorie der linearen Differentialoperatoren ist nicht nur an sich von Interesse, sondern liefert auch für viele Probleme der mathematischen Physik das grundlegende Werkzeug. Es ist daher sehr wertvoll, daß dieses Standardwerk nun ins Deutsche übersetzt worden ist, zumal seit dem Erscheinen des schönen Buches von *Titchmarsh* bereits 14 Jahre vergangen sind und seither zahlreiche neue Ergebnisse gefunden wurden (u. a. werden in dem vorliegenden Werk gleich Operatoren von beliebiger Ordnung betrachtet). Der erste Teil des Buches bringt die „elementare Theorie der linearen Differentialoperatoren"; bei dieser werden über die Koeffizienten des Operators weitgehende Differenzierbarkeitsannahmen gemacht. Hier findet man in sehr klarer Darstellung die Dinge wie Green'sche Funktion, Eigenwerte und Eigenfunktionen, asymptotisches Verhalten der Eigenwerte, Entwicklung nach Eigenfunktionen. Der zweite Teil des Buches ist mit „Lineare Differentialoperatoren im Hilbertraum" überschrieben. Er beginnt mit einer Einführung in die Funktionalanalysis des Hilbertraumes, insbesondere die Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren. Den Hauptteil des Buches bilden die nun folgenden Kapitel über Symmetrische Differentialoperatoren (wobei über die Koeffizienten nur sehr allgemeine Voraussetzungen nötig sind); Spektraltheorie der Differentialoperatoren, Untersuchung des Defektindex und Spektrums von Differentialoperatoren in Abhängigkeit vom Verhalten ihrer Koeffizienten. Hier finden sich viele interessante Resultate über die Art des Spektrums und die Entwicklung nach Eigenfunktionen. Das letzte Kapitel enthält die Lösung der sogenannten Umkehrung der Sturm-Liouville'schen Randwertaufgabe, d. h. der Bestimmung eines Operators zweiter Ordnung bei gegebener Spektralverteilungsfunktion. Das ausgezeichnete Literaturverzeichnis berücksichtigt auch die seit Erscheinen des russischen Originals hinzugekommene Literatur. Dieses Werk wird für das Studium eines bedeutenden Zweiges der reinen und angewandten Mathematik jedem Interessenten eine große Hilfe sein. *K. Prachar*, Wien

**Coordinate Geometry.** Von *L. P. Eisenhart.* Unveränderter Neudruck der ersten Auflage, 1939. Mit 46 Textabb., XI, 298 S. New York: Dover Publications. 1960. $ 1.65.

Die vorliegende Doverausgabe ist ein ungeänderter Abdruck der ersten Auflage aus dem Jahre 1939; da das behandelte Gebiet jedoch — besonders in elementarer vektorfreier Behandlung — zum klassischen Bestand mathematischen Unterrichts zu zählen ist, stört das Fehlen jeglicher Literaturhinweise aus der Zeit nach 1939 kaum. Der größte Teil des gebotenen Stoffes, der sich auf jene geometrischen Objekte bezieht, die durch lineare und quadratische Gleichungen in zwei und drei Veränderlichen bei Zugrundelegung kartesischer Koordinaten analytisch erfaßt werden, ist nach Methode und Inhalt dem Mittelschulstoff zuzuzählen. Jedem Abschnitt wird eine Sammlung von Aufgaben beigefügt, die der Einübung des gebotenen Stoffes dienen, jedoch gelegentlich auch weiterführende Fragestellungen betreffen. Ein Anhang behandelt die Zusammenhänge zwischen dem Hilbert'schen Axiomensystem und der algebraischen Begründung der ebenen Koordinatengeometrie. Die durchwegs guten Textfiguren ergänzen die methodisch geschickte Darstellung. *H. Brauner*, Wien

**Kombinatorische Geometrie in der Ebene.** Von *H. Hadwiger* und *H. Debrunner.* (Monographies de L'Enseignement Mathématique: No. 2.) Mit 20 Textabb., 122 S. Genève: L'Enseignement Mathématique. 1960. Brosch. sfr. 20.—.

Die kombinatorische Geometrie ist wie sonst kaum ein Gebiet mathematischer Forschung geeignet, Brücke zur Elementarmathematik und Schulmathematik zu sein. Deshalb muß das vorliegende Buch, das eine auf den letzten Stand gebrachte Überarbeitung des Artikels der beiden Verfasser in L'Enseignement mathématique, $2^{me}$ serie, t. I, 56—89 (1955) darstellt, vor allem auch Mittelschullehrern und Mathematikern, die sonst wenig Gelegenheit haben, an aktuelle Forschungsfragen heranzukommen, wärmstens empfohlen werden.

Die Sachgebiete der kombinatorischen Geometrie sind die Figuren der Elementargeometrie wie Punkt, Gerade, Kreis, Quadrat usw. und Fragestellungen über Gesamtheiten solcher Figuren, die kombinatorischen Charakter besitzen. Als Charakteristikum dieses ansprechenden Gebietes muß angesehen werden, daß es oft leicht ist, Probleme dieser Art zu formulieren, daß jedoch auch bei scheinbar einfachen Fragen die Lösungen unerwartet schwierig ausfallen können. Außerdem gibt es kaum allgemeine Methoden; zu jedem Problem muß meist ein spezifischer Lösungsweg gefunden werden.

Im ersten Teil der Darstellung, der ungefähr die Hälfte des Buches ausmacht, sind Fragestellungen sowie ihre (soweit bekannten) Lösungen angegeben unter Verzicht auf Beweise, die — zum Teil nur kurz angedeutet — den zweiten Teil des Buches ausmachen. Dem Wesen einer Monographie entsprechend werden über 100 Literaturzitate angeführt, die Arbeiten bis zum Jahre 1958 erfassen. An Vorkenntnissen werden die Kenntnis der Elementargeometrie, der Lehre von den reellen Zahlen und Grundbegriffe der Theorie ebener Punktmengen benötigt. Der Inhalt sei durch Angabe der wichtigsten behandelten Problemkreise umrissen: kombinatorische Fragestellung über Inzidenzen von Punkten, Geraden, Kreisen; Treffprobleme bei Eibereichen, hauptsächlich Varianten des *Helly*'schen Theorems angewendet auf Eibereiche; Überdeckungen durch spezielle Figuren und Gesetzmäßigkeiten solcher Überdeckungen; punktmengentheoretische Beiträge zur Konvexgeometrie; paradoxe punktmengentheoretische Aussagen; Zerlegung von Punktmengen und kombinatorische Sätze über ebene Graphen. Die 20 Textfiguren tragen wesentlich zur leichteren Verständlichkeit dieses flüssig geschriebenen Buches bei. *H. Brauner*, Wien

**Rechnen in der Chemie.** 2. Teil: Chemisch-technisches und physikalisch-chemisches Rechnen unter Berücksichtigung der höheren Mathematik. Von *W. Wittenberger*. Zweite, neubearbeitete und wesentlich erweiterte Auflage. Mit 158 Textabb., X, 498 S. Wien: Springer-Verlag. 1960. Geb. ö. S 294.—; DM 49.—; sfr. 50.20; $ 11.65; £ 4/3/6.

Die Aneignung der Mathematik ist für den Chemiker insofern ein schwieriges Problem, als er keine Zeit hat, sich als Mathematiker oder theoretischer Physiker auszubilden, obwohl er eine Ausbildung in beiden Fächern gut brauchen könnte. Ein Buch, welches Mathematik für Chemiker lehrt, kann daher gar nicht gut genug sein, wenn es dem Studierenden zeitraubende Umwege und Weitschweifigkeiten ersparen soll. Das vorliegende Buch ist kein Lehrbuch, sondern eine Sammlung von Beispielen und Aufgaben. Es bringt aber vorher jeweils eine kurze und sehr klare Zusammenstellung derjenigen Dinge aus der höheren Mathematik, die bei den betreffenden Beispielen gebraucht werden. Hier werden gelegentlich allerdings auch nicht ganz stichhältige, wenn auch plausible Erklärungen angegeben (so z. B. auf S. 48 für die gliedweise Integrierbarkeit oder S. 147 beim mittleren Fehler der Einzelmessung). Trotzdem ist dies wohl das beste Buch seiner Art wegen der Gründlichkeit, mit der hier über 700 Beispiele und Aufgaben (mit Lösungen) dem Studierenden vorgeführt werden

und weil trotzdem niemals nur Rezepte angegeben werden, sondern wirkliches Verständnis vermittelt wird. Inhaltsangabe: Allgemeines Rechnen — Funktionen. Differenzieren und Integrieren. Das Meßergebnis, Lösungen, Gasvolumina. Mehrstoffsysteme. Chemische Thermodynamik. Elektrochemie, Reaktionsgeschwindigkeit, Optische Eigenschaften — Photochemie. Oberflächenspannungen — Zähigkeit. Chemisch-technische Rechnungen. Technische Rechnungen. Tabellen und Tafeln. Literatur. Schon diese Übersicht zeigt die Fülle des Gebotenen. — Die Verknüpfung zwischen Theorie und Praxis, die in diesem Werk besonders gut verwirklicht wurde, wird jedem Chemiker von außerordentlich großem Nutzen sein. *K. Prachar*, Wien

**Milieux Conducteurs ou Polarisables en Mouvement.** Von *H. Arzeliés*, unter der Mitarbeit von *J. Henry*. (Études Relativistes.) Mit 87 Textabb., XLIV, 347 S. Paris: Gauthier-Villars. 1959. Brosch. 58 NF.

Im Jahre 1955 erschien vom gleichen Verfasser im gleichen Verlag als erster Band einer den Anwendungen des speziellen Relativitätsprinzips gewidmeten Serie eine Darstellung der speziellen Relativitätstheorie. Als Fortsetzung erschien 1957 als erster Teil einer der relativistischen Dynamik und ihrer Anwendungen gewidmeten Darstellung eine ausführlich und klar geschriebene Dynamik eines langsam bewegten Massenpunktes, wobei auch moderne Gesichtspunkte der Feldtheorie berücksichtigt wurden. 1958 erschien als zweiter Teil der relativistischen Dynamik eine Darstellung der Elektrodynamik von *Maxwell* und *Lorentz*. Als weiterer Teil folgt nunmehr eine Darstellung der *Minkowski*schen Elektrodynamik, wobei es sich um die gleichförmigen und die beschleunigten Bewegungen von leitenden oder polarisierbaren Medien handelt. Dieser ganze Problemkreis wird, auf IX Kapitel verteilt, ausführlichst diskutiert. In einem Anhang, der in 6 Abschnitte unterteilt ist, werden verschiedene mathematische Komplikationen des Textes einleuchtend erörtert. Der Autor hat sich durchgehends um eine Darstellung bemüht, die eine Lektüre einzelner Kapitel für sich gestattet, was die praktische Brauchbarkeit des an sich ja ein wenig umfangreichen Buches außerordentlich erhöhen dürfte. Besonders wertvoll sind wieder, wie schon in den vorhergehenden Bänden, die historischen Bemerkungen und die ausführlichen Literaturangaben, die jedem einzelnen Kapitel beigegeben sind. *Th. Sexl*, Wien

**Die Berechnung einer zirkulationslosen Unterschallströmung um den Kreiszylinder mit der Hodographenmethode.** Von *H. Schubert* und *E. Schincke*. (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: Band 103, Heft 6.) Mit 12 Textabb., 42 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1959. Brosch. DM 4.20.

Die vorliegende Untersuchung bildet den dritten Teil einer Untersuchung über das im Titel genannte Thema. Im ersten Teil wurde die nichtlineare partielle Differentialgleichung für die Stromfunktion $\Psi\ (x, y)$ in der Hodographenebene (Polarkoordinaten $w, \vartheta$) durch quadratische Approximation der Poissonschen Adiabatengleichung $p/p_0 = (\varrho/\varrho_0)^\varkappa$ auf die Schwingungsgleichung $\Delta\psi(w, \vartheta) + + k^2/2.\ \psi(w, \vartheta) = 0$ reduziert. Die zirkulationslose Unterschallströmung um ein kreisnahes Profil mit zwei Staupunkten wird aus einem vorgegebenem Hodographen ermittelt (indirektes Problem). Im zweiten Teil wurde das direkte Problem in der Hodographenebene als Randwertproblem der Schwingungsgleichung formuliert. In dem vorliegenden dritten Teil wird dieses Randwert-

problem für die Kreiskontur einer Anström-Mach-Zahl 0,3 durch ein Näherungsverfahren gelöst. Die Güte der Näherung wird an einem Beispiel diskutiert.

*Th. Sexl*, Wien

**Théorie Fondamentale du Système Périodique des Éléments.** Von *S. Dockx O. P.* (Archives de l'Institut International des Sciences Theoriques: No. 10.) 183 S. Bruxelles: Office International de Librairie. 1959. Brosch. F. B. 300.—.

Der Autor versucht eine neue Interpretation des periodischen Systems der Elemente. Die Zurückführung der Gesetzmäßigkeiten des periodischen Systems auf einen schalenförmigen Aufbau der Elemente, der durch die vier Quantenzahlen $n$, $l$, $m_l$ und $m_s$ beherrscht wird, gelingt mit Hilfe des Pauliprinzips. Dabei ist man aber gezwungen, schon für die Einzelheiten des Ausbaues der $M$- und $N$-Schale immer mehr und mehr experimentelle Gesetzmäßigkeiten zu Hilfe zu nehmen. Dies letztere glaubt der Autor dadurch vermeiden zu können, daß er ein neues Aufbauprinzip für einen magnetischen Schalenbau der Elemente vorschlägt. Zu diesem Zweck greift er auf Gesetzmäßigkeiten zurück, die schon *Mendelejeff* aufgedeckt hatte und die er in fünf Theoremen im 1. Teil von Kapitel II formuliert. Dadurch kommt er zu VII Hauptperioden, an deren Ende jeweils die Elemente I *He* (2), II *Be* (2+2), III *Mg* (2+8+2), IV *Ca* (2+8+8+2), V *Sr* (2+8+18+8+2), VI *Ba* (2+8+18+18+18+8+2) und VII *Ra* (2+8+ +18+32+18+8+2) stehen. Das neue Einteilungsprinzip unterscheidet sich von dem des Schalenbaues hauptsächlich in 2 Punkten: 1. die Besetzungszahlen treten immer paarweise auf, bevor eine neue aufscheint; 2. die Besetzungszahlen der Unterperioden erscheinen in umgekehrter Reihenfolge wie beim Schalenbau der Elektronen. Auf dieser Grundlage wird dann in den Teilen 2—4 des II. Kap. das Erfahrungsmaterial durchdiskutiert. Ferner wird für alle Elemente des periodischen Systems (einschließlich der jüngst entdeckten *Np* ($Z=93$) bis *No* ($Z=102$)) eine ausführliche Tabelle mit allen Besetzungszahlen und den spektroskopischen Grundtermen zusammengestellt. Ein ausführlicher Vergleich des periodischen Systems auf Grund eines Schalenbaues der Elektronen mit dem neuen Ordnungsprinzip von „magnetischen" Schalen beschließt das Buch, von dem sicherlich viele Anregungen für die Theoretiker des periodischen Systems zu erwarten sind.

*Th. Sexl*, Wien

**Orbit Theory.** Proceedings of the Ninth Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society, New York University, April 1957. Herausgegeben von *G. Birkhoff* und *R. E. Langer*. (Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: Band IX.) Mit 61 Textabb., V, 195 S. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. 1959. Geb. $ 7.20.

Die Berechnung der Bahnen von ungeladenen und geladenen Massenpunkten in vorgegebenen äußeren Feldern bildete eines der reizvollsten Probleme für die Mathematiker, Astronomen und Physiker des 17.—19. Jahrhunderts. Der ganze Problemkreis ist aber trotz der ungeheuren darauf verwendeten Mühe keineswegs erschöpft. Vielmehr konnte das 20. Jahrhundert bei der Behandlung aktueller Probleme, die z. B. bei der Entwicklung der Teilchenbeschleuniger oder bei der Herstellung künstlicher Erdsatelliten auftraten, entscheidende Fortschritte erzielen. Es ist daher außerordentlich begrüßenswert, daß die amerikanische mathematische Gesellschaft im April 1957 an der New York University eine Tagung über diese Probleme veranstaltete und die Ergebnisse dieser Tagung in dem vorliegenden Bande allgemein zugänglich machte. Es

wurden im einzelnen folgende zehn Referate gehalten: 1. *E. D. Courant*, Stabilitätsprobleme der Bahnen in Teilchenbeschleunigern; 2. *St. Olbert*, Bewegung von Ultrastrahlenteilchen in galaktischen Magnetfeldern; 3. *W. H. Bennett*, Störmerbahnen; 4. *P. Herget*, Allgemeine Theorie der Störungen, die von der Abplattung der Erde herrühren; 5. *F. L. Whipple*, Probleme bei der Voraussage der Lage künstlicher Satelliten; 6. *K. A. Ehricke*, Cislunare Bahnen; 7. *J. W. Siry*, Satellitenbahnen von Torpedoraumschiffen (Vanguard launching vehicles); 8. *W. J. Eckert*, Numerische Bestimmung von exakten Teilchenbahnen; 9. *D. Brouwer*, Bemerkungen zur allgemeinen Theorie der Planetenbewegung; 10. *C. Graef-Fernández*, Bahnen in Birkhoffschen Zentralfeldern. *Th. Sexl*, Wien

**Optik aller Wellenlängen.** Tagung der Physikalischen Gesellschaft in der Deutschen Demokratischen Republik vom 2. bis 5. November 1958 in Jena. Herausgegeben im Auftrag der Physikalischen Gesellschaft in der D.D.R. von *P. Görlich* und *R. Tiedeken*. (Tagungsberichte der Physikalischen Gesellschaft in der D.D.R.) Mit 314 Textabb., 395 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1959. Brosch. DM 75.—.

Auf der von der physikalischen Gesellschaft in der Deutschen demokratischen Republik vom 2. bis 5. November 1958 in Jena veranstalteten Tagung wurde das Thema „Optik aller Wellenlängen" in derartiger Ausführlichkeit von 64 Forschern behandelt, daß man sich auf eine Aufzählung der Gebiete beschränken muß, die auf der Tagung behandelt wurden. Es sind dies: 1. Grundlagen; 2. Halbleiter; 3. Spektroskopie; 4. Spektralapparate; 5. Physiologische Optik; 6. Beugungstheorie; 7. Geometrische Optik; 8. Mikroskopie; 9. Objektive Prüfung; 10. Spezialfragen der technischen Optik und Randgebiete. Für die Leser dieser Zeitschrift dürfte insbesondere der erste Vortrag von *J. Picht* über eine Verallgemeinerung der Schrödingergleichung von Interesse sein. *Picht* erörtert darin die Eigenschaften der einem bewegten Elektron zugeordneten inhomogenen de Broglie-Wellen, die mathematisch durch einen virtuellen Absorptionskoeffizienten dargestellt werden können und berichtet über einen Versuch, eine Verallgemeinerung der Schrödingergleichung durchzuführen, in der die Dämpfung der Elektronenwellen in Abhängigkeit von der durchlaufenen Weglänge berücksichtigt wird. *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

*Soeben erschien ein neues originelles Lehrbuch der Technischen Mechanik*

# Mechanik der festen Körper

Von

**Heinz Parkus**

o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien

Mit 191 Textabbildungen. VIII, 264 Seiten. Gr.-8°. 1960
Steif geheftet S 156.—, DM 26.—, sfr. 26.60, $ 6.20
Ganzleinen S 174.—, DM 29.—, sfr. 29.70, $ 6.90

Die Mechanik bildet eine der wichtigsten Grundlagen der Technik. Gerade heute werden ihr wieder viele neue Anwendungsgebiete erschlossen, während andere an Bedeutung einbüßen. Das vorliegende Lehrbuch will dieser Entwicklung Rechnung tragen. Richtunggebend war dabei der Gedanke, den umfangreichen, die allgemeine Mechanik und die Elastomechanik umfassenden Stoff unter Weglassung alles Entbehrlichen und Veralteten so zu gliedern und darzustellen, daß er in der den Studenten heute zur Verfügung stehenden stark verkürzten Zeit wirklich bewältigt werden kann. Dazu mußte vom traditionellen Aufbau der Mechanik völlig abgegangen werden. Die Stoffauswahl wurde den modernen Erfordernissen angepaßt und so getroffen, daß auch der bereits in der Praxis stehende Ingenieur das Buch als Nachschlagewerk verwenden kann. Hervorgehoben seien hier z. B. die Abschnitte über Kreiseltheorie, *Lagrange*sche Gleichungen, Schwingungen und Stabilität, Wölbkrafttorsion, Wärmespannungen und über das *Ritz*sche Verfahren. Auf präzise und knappe Darstellung wurde besonderer Wert gelegt.

# Linear Programming in Industry

Theory and Application. An Introduction

By

**Sven Danö**

Assistant Professor of Economics, University of Copenhagen

With 6 figures. VIII, 120 pages. Gr.-8°. 1960
Steif geheftet S 120.—, DM 20.—, sfr. 20.50, $ 4.75

Die Lineare Programmierung hat sich in den letzten Jahren zu einer sehr erfolgreichen Methode zur Lösung vieler praktischer Planungsprobleme in der industriellen Produktion, in der Transportwirtschaft, in der Landwirtschaft und auf anderen Gebieten entwickelt. Das vorliegende Buch ist als eine Einführung in diese Methoden sowohl für Studenten der Volkswirtschaftslehre als auch für Ingenieure, Wirtschaftsführer und alle jene gedacht, die sich mit der Organisation und Planung industrieller Unternehmungen befassen. Das Buch stellt in einfacher Weise die mathematische Theorie der Linearen Programmierung dar, beschreibt im einzelnen eine große Zahl industrieller Anwendungen und erläutert die praktischen Methoden numerischer Lösungen. Instruktive Übungen ergänzen überall den Text. Vom Leser werden nur geringe mathematische Vorkenntnisse gefordert. Trotzdem ist es dem Verfasser gelungen, mit elementaren mathematischen Hilfsmitteln tiefer in die Gedankengänge der Linearen Programmierung einzudringen, als dies in anderen Büchern bisher der Fall war.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

# Vorlesungen über höhere Mathematik

Von

Dr. phil. **Adalbert Duschek**

weiland o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien

*Soeben erschienen:*

Erster Band

**Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Unendliche Reihen**

Dritte, verbesserte Auflage

Mit 169 Textabbildungen. X, 440 Seiten. Gr.-8°. 1960

S 270.—, DM 45.—, sfr. 46.10, $ 10.70

Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, $ 11.45

Dritter Band

**Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Variationsrechnung. Funktionen einer komplexen Veränderlichen**

Zweite, mit Berichtigungen versehene Auflage

Mit 107 Textabbildungen. XII, 512 Seiten. Gr.-8°. 1960

S 270.—, DM 45.—, sfr. 46.10, $ 10.70

Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, $ 11.45

*Lieferbar ist:*

Zweiter Band: **Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Lineare Algebra. Tensorfelder. Differentialgeometrie.** Zweite, neu bearbeitete Auflage. Mit 136 Textabbildungen. VIII, 401 Seiten. Gr.-8°. 1958.

S 270.—, DM 45.—, sfr. 46.10, $ 10.70

Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, $ 11.45

„... Das Buch beginnt mit einer Vertiefung der Infinitesimalrechnung, wobei das Hauptgewicht auf die Differentiation und die Integration von Funktionen mit mehr als zwei unabhängigen Variablen gelegt ist. Als mathematische Anwendungen dieser Theorie werden geometrische Transformationen, Bestimmung von Extremalwerten, eine Einführung in die Kurventheorie sowie die Integralsätze von *Gauß* und *Green* für die Ebene behandelt. Auch die Vektoralgebra wird eingeflochten. Bei ihrer Darstellung fällt auf, daß das Summenzeichen weggelassen wird, ähnlich wie dies bei der Tensorrechnung üblich geworden ist. Eine weitere Vertiefung bringt das Kapitel über lineare Algebra, das mit einer Betrachtung der Tensoren zweiter Stufe endet... Die Lektüre erfordert ein gewisses Maß an mathematischen Fähigkeiten und gute Kenntnisse des im ersten Band Gebotenen. Verglichen mit dem Schwierigkeitsgrad des Themas darf die Darstellung als anschaulich und leicht lesbar bezeichnet werden. Es ist dem großen didaktischen Geschick des Autors zu verdanken, daß gleichwohl keine Abstriche an der mathematischen Strenge vorgenommen wurden. Das Buch eignet sich in gleicher Weise für Studierende an Technischen Hochschulen und an Universitäten. Es darf auch zum Selbststudium warm empfohlen werden."

*Technische Rundschau*

*Im Frühjahr 1961 erscheint:*

Vierter Band: **Reihenentwicklungen. Integralgleichungen. Laplace-Transformation. Randwertprobleme. Potentialtheorie.** Mit etwa 50 Textabbildungen. Etwa 340 Seiten. Gr.-8°. 1961.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung